



31.75
LSoc 1716.4
SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650
CHRISTO ET ECCLESIAE
1 April, 1830.
N. Hurd Sc.
BOSTON.
Digitized by Google



Recd. April 1, 1830.

Delalande

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

ANNÉE MDCCLXIX.

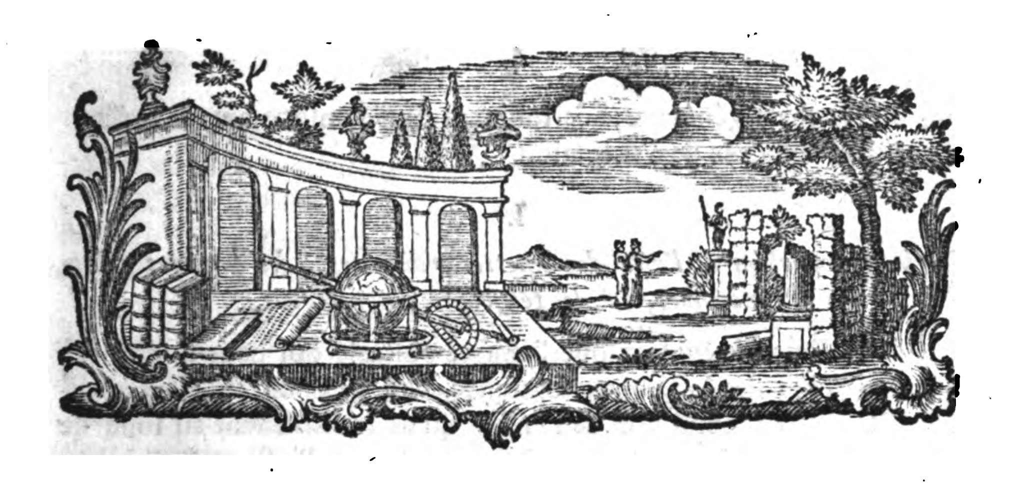


À BERLIN,
CHEZ HAUDE ET SPENER
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale
MDCCLXXI.

Imprimé
par ordre de l'Académie.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.



REMARQUES DÉTACHÉES

SUR

LA PERFECTION RÉELLE DES LUNETTES DIOPTRIQUES.

PAR Mr. BEGUELIN (*).

L'approbation flatteuſe que Mr. d'Alembert a bien voulu donner à mon premier Mémoire ſur la perfection pratique des lunettes dioptriques, & les excellentes réflexions que cet illuſtre Géometre a communiquées à cette occaſion à notre Académie (**) m'ont engagé à faire d'ultérieures recherches rélatives à ce ſujet, qui eſt auſſi intéreſſant que difficile à épuiſer. Je les réduirai ſous

(*) Lû le 8. Novembre 1770.
(**) Voyez dans ce Volume ci les Mémoires de la Claſſe Mathématique.

sous divers chefs généraux; & toujours dans l'unique but de faciliter aux artistes le succès de l'exécution.

I.

Sur la comparaison de l'effet des lunettes ordinaires, des lunettes achromatiques, & des télescopes catoptriques.

1. Il paroit évident que l'unique obstacle qui peut mettre des bornes à l'effet des instrumens optiques, tant qu'ils ont un champ perceptible, c'est la confusion de l'image qu'ils transmettent au fond de l'oeil. De là il suit que, lorsque les trois especes d'instrumens ne produiront qu'un même degré de confusion, leur effet sera exactement le même; & qu'il sera également excellent lorsque ce degré de confusion sera imperceptible à notre vue, & que l'image sera également & suffisamment éclairée.

2. Il n'y a donc proprement que deux choses qui paroissent devoir être constantes dans tous les instrumens de chaque espece, & les mêmes dans les trois especes; ce sont le degré de clarté & le degré de netteté: ce dernier est déterminé par la mesure de l'angle de la plus grande confusion tolérable; l'autre par le rapport de l'ouverture au grossissement.

3. C'est sur ces principes que les artistes construisent les lunettes dioptriques ordinaires & les télescopes à miroir: quelle que soit la longueur de l'instrument, l'angle de confusion dans l'oeil est invariable, aussi bien que la clarté de l'image; parce que, quoique la confusion & l'obscurité devroient nécessairement augmenter avec le grossissement, les rapports prescrits entre les ouvertures & les distances focales de l'objectif & de l'oculaire, compensent exactement cette augmentation. Mais, d'un autre côté, ces rapports eux-mêmes empêchent que l'effet de ces instrumens ne soit en raison de leur longueur: l'effet d'une lunette de 400 pieds n'est que dix fois celui d'une lunette de 4 pieds, & un télescope de 16 pieds ne produit que huit fois l'effet du télescope d'un pied.

Quoi-

Quoique, d'après ces rapports, l'angle de confusion des télescopes & des lunettes dioptriques soit constant, sa grandeur absolue, pour qu'il soit insensible, n'est néanmoins pas exactement déterminée, & il s'en faut extrèmement qu'elle soit la même dans ces deux especes d'instrumens.

4. Cette grandeur n'est pas exactement déterminée, parce qu'elle ne l'a été que d'après l'expérience dans des cas individuels. Une lunette de M. Huygens de 30 pieds de foyer s'étant trouvée excellente a servi de base aux tables des lunettes ordinaires; & par le même motif on a pris les élémens des tables catoptriques d'après un télescope de Mr. Hadley, de 5 pieds $2\frac{1}{2}$ pouces. Il est aisé de voir que le physique entroit pour beaucoup dans la perfection de ces deux instrumens: aussi l'expérience a-t-elle montré que l'effet peut être meilleur, & quelquefois moindre, que les tables ne l'annoncent.

5. Mais ce qui doit paroître surprenant, c'est que l'angle de confusion, tolérable dans le télescope catoptrique, est presque vingt fois plus petit que ce même angle dans une lunette ordinaire, comme je l'ai déjà fait voir dans mon second Mémoire sur ce sujet, & comme Mr. d'Alembert l'avoit aussi remarqué. Il est certain que, si la confusion dont on tient ici compte, étoit la seule qui défigurât l'image des objets apperçus, & qu'elle fût de la même nature dans les deux instrumens, le fait paroitroit inexplicable; mais il suffira de développer la diversité des circonstances pour l'éclaircir.

6. Le miroir sphérique qui forme l'objectif du télescope, ne produit qu'une espece d'aberration, celle de sphéricité, qui suit, comme dans les lunettes dioptriques ordinaires, la raison directe du quarré de l'ouverture, & la raison inverse de la distance focale de l'objectif. Cette aberration de longueur, multipliée par l'ouverture, & divisée par le foyer de l'objectif, répond à l'aberration latérale, laquelle encore divisée par la distance focale de l'oculaire, exprime le diametre apparent de la confusion au fond de l'oeil.

Soient donc ω', F', f', l'ouverture, la distance focale de l'objectif, & celle de l'oculaire pour le télescope à miroir; ω, F, f, les

 mêmes

mêmes choſes pour la lunette dioptrique ordinaire, & ω'', F'', f'', les mêmes choſes encore pour la lunette achromatique; on aura dans le téleſcope, puisque l'angle de confuſion doit être constant (§. 2.)

$$\frac{\omega'^3}{F'F'f'} = c'.$$

& pour la clarté conſtante:

$$\omega' : \frac{F'}{f'} = 1 : a'.$$

puisque le groſſiſſement linéaire $\frac{F'}{f'}$ doit être en raiſon directe de l'ouverture linéaire. Ici les lettres c', & a', déſignent des nombres conſtans.

Or, à l'aide de ces deux équations, on trouve la valeur de chacune des trois variables, déterminée par l'une des deux autres, ce qui fournit les ſix équations ſuivantes.

I. $\omega' = \sqrt[4]{\frac{F'^3 c'}{a'}}$. II. $\omega' = f'^3 a'^2 c'$.

III. $F' = \sqrt[3]{\frac{\omega'^4 a'}{c'}}$. IV. $F' = f'^4 a'^3 c'$.

V. $f' = \sqrt[3]{\frac{\omega'}{a'^2 c'}}$. VI. $f' = \sqrt[4]{\frac{F'}{a'^3 c'}}$.

7. Puisque l'aberration longitudinale des téleſcopes eſt $= \frac{(\frac{1}{2}\omega')^2}{4r}$, ($r$ étant le rayon du miroir concave) & que l'on a ici $2F' = r$, elle eſt $= \frac{\omega'\omega'}{32F'}$; ainſi la plus petite aberration latérale eſt $= \frac{\omega'\omega'}{4 \cdot 32F'} \times \frac{\omega'}{F'}$, & le diametre apparent de la confuſion eſt $= \frac{\omega'^3}{128 \cdot F'F'f'} = \frac{c'}{128}$. Et comme

on

on a dans le telescope de Hadley $\omega' = 5''$; $F' = 62,5''$; $f = \frac{3''}{10}$, on a ici $c' = \frac{5^3,10}{62,5^2.3} = \frac{8}{75}$. Ainsi le sinus de l'angle de confusion $\frac{c'}{128} = \frac{1}{1200} = 0,000833$, ce qui est le sinus d'un angle de 172 secondes, comme je l'ai déjà déterminé dans mon second Mémoire art. 22.

Puisque $a' = \frac{F'}{f'\omega'}$, on a ici en pouces $a' = \frac{62,5 \times 10}{5.\ 3}$ $= \frac{125}{3}$; ou en pieds $a' = \frac{F'}{12} : \frac{f'\omega'}{12.12} = \frac{12F'}{f'\omega'} = 125.4 = 500$, distinction qui n'a pas lieu à l'égard de c', parce que

$$\frac{\omega'^3}{12^3} \times \frac{12^3}{F'F'f'} = \frac{\omega^3}{F'F'f'}.$$

En substituant ces valeurs de a' & c', dans les formules précédentes, on a pour le télescope:

Rapports en pouces.

I. $\omega' = \frac{2}{5} \sqrt[4]{\frac{F'^3}{10}} = \frac{5000}{27} f'^3$.

II. $F' = \frac{5}{2} \sqrt[3]{25\,\omega'^4} = \frac{5^7.8}{9^2} f'^4$.

III. $f' = \frac{3}{10} \sqrt[3]{\frac{\omega'}{5}} = \frac{3}{50} \sqrt[4]{10F'}$.

Rapports

Rapports en pieds.

$$\text{I.}\quad \omega' = \tfrac{2}{5}\sqrt[4]{\frac{F'^3}{120}} = \frac{10^4, 2^3}{3} f'^3.$$

$$\text{II.}\quad F' = \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{300\,\omega'^4} = \frac{5^7 . 8^3}{3} f'^4.$$

$$\text{III.}\quad f' = \tfrac{1}{80}\sqrt[3]{\frac{3\,\omega'}{10}} = \tfrac{1}{800}\sqrt[4]{120\,F'}.$$

8. Dans les lunettes dioptriques ordinaires, ce n'eſt pas la confuſion de ſphéricité que l'on ſuppoſe conſtante, c'eſt celle qui réſulte de l'aberration des couleurs, comme étant la plus conſidérable, puisqu'elle occupe en longueur, ſelon les obſervations de Mr. Newton, la $27\frac{1}{2}$ partie de la diſtance focale de l'objectif, ce qui donne le diametre du plus petit cercle de confuſion $= \frac{F}{2.27,5} \times \frac{\omega}{F} = \frac{\omega}{55}$: à ce compte l'angle de confuſion au fond de l'oeil, qui doit être conſtant, ſera $\frac{\omega}{55} \times \frac{1}{f} = \frac{c}{55}$; & l'on aura pour la clarté l'équation $\omega = \frac{F}{fa}$, d'où l'on tire les ſix rapports:

$$\text{I.}\quad \omega = fc. \qquad\qquad \text{II.}\quad \omega = \sqrt{\frac{Fc}{a}}.$$

$$\text{III.}\quad F = \frac{\omega\omega a}{c}. \qquad\qquad \text{IV.}\quad F = ffca.$$

$$\text{V.}\quad f = \frac{\omega}{c}. \qquad\qquad \text{VI.}\quad f = \sqrt{\frac{F}{ca}}.$$

Dans la lunette de M. Huygens, on avoit $\omega = 3''$, $F = 360^{p}$. & $f = 3, 3''$; donc, $c = \frac{\omega}{f} = \frac{10}{11}$, & par conſéquent le ſinus de

de l'angle de confusion dans l'oeil étoit $\frac{c}{55} = \frac{2}{121}$, ce qui est le sinus d'un angle de 57 minutes.

Et puisque $a = \frac{F}{\omega . f} = \frac{360}{3 \cdot 3,3}$ pouces, on a lorsque les dimensions sont prises en pouces: $a = \frac{40}{1,1}$; & lorsqu'on les prend en pieds, $a = \frac{40 . 12}{1,1} = 436,4$, ce qui donne pour la *lunette ordinaire*:

Les rapports en pouces

I. $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F}{10}} = \frac{10}{11} f$.

II. $F = 40 . \omega\omega = \frac{4000}{121} ff$.

III. $f = 1,1 \omega = \frac{11}{20} \sqrt{\frac{F}{10}}$.

Les rapports en pieds

I. $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F}{120}} = \frac{10}{11} f$

II. $F = 480 . \omega\omega = \frac{48000}{121} ff$.

III. $f = 1,1 \omega = \frac{11}{20} \sqrt{\frac{F}{120}}$.

9. En comparant maintenant les diametres apparens de la confusion également tolérable dans la lunette ordinaire, & dans le télescope, on les trouve par ce calcul comme $\frac{2}{121}$ à $\frac{1}{1100}$, c. à d. à très peu près comme 20 à 1. Or il seroit inconcevable que deux images d'un même objet, dont l'une seroit défigurée par une confusion quatre

 cent

cent fois plus grande que celle de l'autre, paruſſent néanmoins également diſtinctes; il en faut donc conclure, que ces confuſions étant d'une nature hétérogene, ne ſauroient être comparées, ſi ce n'eſt pour déterminer par l'effet de chacune combien une eſpece eſt plus nuiſible que l'autre à la netteté de l'image. J'ai déjà montré, dans mon ſecond Mémoire, que c'étoit la confuſion produite par la ſphéricité qui devoit nuire le plus à la viſion diſtincte; ſi donc nous nous en tenons aux deux inſtrumens ſur lesquels on a conſtruit les tables optiques, il réſultera que la confuſion des couleurs eſt environ quatre cent fois, ou plus préciſément 393 fois, moins nuiſible que celle de figure, puisque les ſinus des angles inſenſibles de confuſion ſont entr'eux comme 19, 8 à 10.

10. Ce réſultat eſt d'ailleurs évident par la nature même du ſujet: car, pour que l'image ne ſoit pas défigurée par la confuſion des rayons, il faut que le cercle de confuſion ſoit imperceptible. Or, quoiqu'il ne ſoit pas aiſé d'aſſigner préciſément la grandeur d'un angle viſuel inſenſible, il eſt toujours bien certain qu'il ne ſauroit excéder cinq ou ſix minutes; & qu'il eſt, en pluſieurs cas, cent fois plus petit. Puis donc que l'angle de confuſion produit par les couleurs ſe trouve de 57 minutes, en ſuppoſant la diſperſion égale à une $27\frac{1}{2}$e partie du foyer, il faut de néceſſité, ou que la diſperſion des rayons ne ſoit pas ſi grande que Mr. Newton l'aſſigne, ou qu'elle ne ſoit pas fort ſenſible.

11. Effectivement Mr. Newton, pour concilier ſes obſervations ſur la diverſe réfrangibilité avec l'effet des lunettes dioptriques, a déjà réduit l'aberration ſenſible des couleurs à la 125me partie du foyer de l'objectif, ce qui rétrécit le diametre du cercle de confuſion juſqu'à la 250e partie de l'ouverture: ainſi le ſinus de l'angle de confuſion dans l'oeil n'eſt plus que $\frac{\omega}{250f} = \frac{10}{250,\ 11} = \frac{1}{275} = 0,003636$, ce qui répond à un angle de $12\frac{1}{2}$ minutes. A ce compte les confuſions hétérogenes ſeroient entr'elles comme 1200^2 à 275^2, ou comme

2304 à 121, c. à d. à peu près comme 19 à 1. Donc encore après cette réduction la confusion produite par les couleurs sera 19 fois moins nuisible que la confusion qui résulte de la sphéricité des lentilles.

12. Cette conséquence est encore confirmée par la comparaison des ouvertures. Nous avons vû (art. 8.) que dans la lunette ordinaire l'ouverture est en pouces, la 36 partie de l'amplification, tandis que (art. 7.) l'ouverture du télescope n'en est qu'environ la 42 partie, en sorte que ces ouvertures sont entr'elles à peu près comme 7 à 6; & exactement comme 55 à 48. Or naturellement on devroit s'attendre que, si les ouvertures n'étoient pas exactement les mêmes dans les deux instrumens, pour un grossissement égal, la lunette dioptrique auroit la plus petite ouverture, puisque la réfraction transmet beaucoup plus de rayons que la réflexion, comme M. d'Alembert l'a déjà remarqué. (Opusc. Tom. III. §. 576.) Il arrive néanmoins le contraire, & il est aisé de voir que c'est une suite de la différence essentielle qu'il y a entre la confusion des couleurs & celle de la figure. Si, par exemple, dans le télescope de Hadley où l'on a $\frac{F'}{f'} = \frac{625}{3}$, on avoit, comme dans la lunette, $a = \frac{400}{11}$, ce télescope auroit eu une ouverture $\omega' = \frac{275}{48}$, c. à d. d'environ $5\frac{3}{4}$ pouces: par conséquent l'angle de confusion du télescope $\frac{\omega'^3}{128.\ F'F'f'}$ feroit $=$ $\frac{275^3.\ 10}{48^3.\ 128.\ 62,5^2.\ 3} = \frac{11^3.\ 5}{48^4} = 0{,}0012536$, sinus de plus de $258\frac{1}{2}''$. Ainsi cette confusion feroit à la confusion actuelle du télescope, comme 15 à 10.

Si au contraire on avoit réduit l'ouverture de la lunette de Mr. Huygens à celle du téleſcope, en poſant $n = \frac{125}{3}$, cette ouverture auroit été $\omega = \frac{360.\ 3}{3,3.125} = \frac{144}{55}$, c. à d. d'environ 2,6 pouces. Ainſi l'angle de confuſion $\frac{\omega}{55f}$ auroit été $= \frac{144}{55.55.3,3} = \frac{288}{11^3.15}$ $= 0,014425$, ou de $49\frac{1}{2}$ minutes; au lieu des 57 qu'il a actuellement. Mais, comme il importoit très peu de diminuer dans cette lunette la confuſion de couleurs d'une ſeptieme partie, & que ſon aberration de ſphéricité eſt déjà extrèmement petite, on n'avoit point d'intérêt d'y réduire l'ouverture à celle du téleſcope; au lieu qu'il ne ſeroit pas poſſible de donner à celui-ci l'ouverture de la lunette ſans augmenter de moitié la confuſion de ſphéricité, ce qui la rendroit ſans doute intolérable. Ainſi une addition de 86 ſecondes à la confuſion de ſphéricité eſt plus nuiſible qu'un retranchement de 510 ſecondes ſur la confuſion de couleurs n'eſt avantageux.

13. Mais, en concevant pourquoi le téleſcope catoptrique n'admet pas une plus grande ouverture, on pourroit demander pourquoi la lunette ordinaire, avec une plus grande ouverture, n'admet pas un plus petit oculaire, & par conſéquent une plus grande amplification, puiſqu'une image plus amplifiée auroit encore pour le moins autant de clarté que celle du téleſcope? C'eſt apparemment parce qu'alors la confuſion deviendroit exceſſive. Si dans la lunette de Huygens on laiſſe l'ouverture de trois pouces & qu'on ſuppoſe ſon rapport au groſſiſſement, comme dans le téleſcope, $= \frac{125}{3}$, on aura le foyer de l'oculaire, $f = \frac{360}{125}$ pouces; mais alors l'angle de confuſion ſera $\frac{3.\ 125}{55.\ 360} = \frac{5}{264} = 0,01894$, ſinus de 65 minutes; ce qui ſeroit ſans doute trop fort. Si d'un autre

côté

côté on diminue également l'ouverture & le foyer de l'oculaire, on aura $\omega f = \frac{216}{25}$ pouces, & mettant entre ω & f le rapport ordinaire de 10 à 11, on trouve $f = 3,08$ pouces, & $\omega = 2,8$ pouces, la confusion ne sera point augmentée, mais aussi l'effet ne sera gueres plus considérable que celui de la lunette de Huygens; il ne sera que comme 117 à 109, & je ne doute point qu'on n'eût pû l'obtenir, en se contentant d'une moindre clarté.

Il se pourroit néanmoins aussi que la lumiere ayant à parcourir un espace six fois plus long dans la lunette de Huygens que dans le télescope de Hadley, & cela à travers un air libre & agité, en souffrît quelque affoiblissement, qui exigeât une plus grande ouverture.

13. Outre la confusion des couleurs, les lunettes ordinaires ont aussi une confusion de sphéricité, & c'est celle-ci qui pourroit être légitimement comparée avec celle des télescopes catoptriques, si la confusion qui résulte des couleurs ne la surpassoit pas de beaucoup en étendue.

L'aberration longitudinale de sphéricité d'une lentille bi-convexe isoscele de verre commun, est estimée ordinairement $= \frac{1,529 \times (\frac{1}{2}\omega)^2}{F}$, ou plus exactement, comme je l'ai déterminée dans mon second Mémoire (art. 3.), elle est $= \frac{1,67558 \cdot (\frac{1}{2}\omega)^2}{F}$. Ainsi le diametre apparent de la confusion qui en résulte est $\frac{1,675\,\omega^3}{4 \cdot 4 \cdot FFf}$, ou à peu près $= \frac{\omega^3}{10 \cdot FFf}$; & puisqu'on a dans les lunettes ordinaires $\omega = \frac{10}{11} f$, cette confusion est $= \frac{100\,ff}{11^3 \cdot FF}$, d'où l'on voit que l'angle de confusion de figure n'est point constant dans les lunettes ordinaires, & qu'il croit en raison inverse du quarré des grossissemens, ou en raison inverse de la distance focale, puisqu'on a ici $ff = \frac{11^2}{4000} F$,

&

& par conséquent l'angle de confusion de figure $= \frac{1}{40.\ 11.\ F}$ $= \frac{1}{440\,F}$ pouces. (art. 8.)

Dans la lunette de Mr. Huygens on a $F = 360$ pouces; donc cet angle a pour sinus $\frac{1}{440.\ 360} = \frac{1}{158400} = 0{,}00000632$, ce qui ne répond qu'à un angle d'environ $1\frac{1}{2}$ secondes, comme je l'ai déjà déterminé par une autre méthode dans mon second Mémoire art. 20.

14. Si l'on vouloit, dans les lunettes dioptriques ordinaires, rendre constant l'angle de confusion de figure, & le fixer à 3 minutes comme dans les télescopes catoptriques, on auroit, pour peu que cette lunette fût longue, une énorme confusion de couleurs; & si l'on vouloit en même tems réduire cette derniere confusion à l'angle tolérable de 57 minutes, ou d'un degré, on n'auroit plus qu'une lorgnette d'Opéra qui grossiroit environ dix fois en diametre.

En effet la premiere supposition donne l'équation

$$\frac{\omega^3}{10.FFf} = C = \sin 3'$$

& comme on a pour la clarté

$$\omega.\ \frac{F}{f} :: 1.\ a,$$

si l'on prend $a = 36$ lorsque F est en pouces (art. 8.) on aura $C = \frac{F}{36^3.10.f^4}$, & ayant $C = 0{,}000833$ (art. 7.) on aura $F = 36^3{,}0{,}00833.f^4$.

Or

Or la confusion de couleurs est $\frac{\omega}{55f}$, (art. 8.) & ayant

$$\omega = \frac{F}{36f} \text{ elle est } \frac{F}{55 \cdot 36ff} = \frac{36^2 \cdot 0,00833\,ff}{55}$$

$$= \frac{36^2 \cdot 0,00833 \sqrt{\frac{F}{36^3 \cdot 0,00833}}}{55} = \frac{\sqrt{36 \cdot 0,0833\,F}}{55} =$$

$6 \cdot 0,00166 \sqrt{F} = 0.00996 \sqrt{F}$ pouces. Ainsi, quand la longueur de la lunette ne seroit que de 36 pouces, la confusion de couleurs formeroit déjà un angle apparent de 3^d. 25 minutes.

Pour le réduire à l'angle de 57′, on aura l'équation:

$$0.00996 \sqrt{F} \text{ pouces}, = \sin 57' = 0.016529, \text{ (art. 8.)}$$

$$\text{donc } F = \frac{16529^2}{9960^2} \text{ pouces.}$$

Ce qui feroit une lorgnette de $2\frac{3}{4}$ pouces de foyer.

15. En supposant dans la lunette ordinaire & dans le télescope la même longueur, le même effet & la même ouverture, la confusion de sphéricité de la lunette seroit treize fois plus grande que celle du télescope; car l'une seroit à l'autre comme $\frac{\omega^3}{10.FFf}$ à $\frac{\omega'^3}{128.F'F'f'}$ (art. 13 & 7.), donc comme 64 à 5. Mais une telle confusion ne seroit pas supportable; il faut donc diminuer l'amplification de la lunette, pour en diminuer la confusion, ce qui ne se peut faire qu'en raccourcissant le foyer de l'objectif, ou en allongeant celui de l'oculaire; & dans l'un & l'autre cas il faut encore rétrécir l'ouverture, dont la premiere grandeur seroit non seulement inutile, mais encore très nuisible, puisque la confusion est en raison du cube de cette ouverture. Ainsi, quand les lunettes ordinaires n'auroient d'autre imperfection que l'aber-

l'aberration de sphéricité, elles ne pourroient produire que la moitié de l'effet d'un télescope d'égale longueur. En effet, supposant $F' = F$, $\omega' = n\omega$, $f' = \frac{f}{n}$, on aura pour des confusions égales, dans des instrumens d'égales longueurs, $\frac{\omega^3}{10.FFf} = \frac{n^4\omega^3}{128.FFf}$, donc $n^4 = 12,8$, & $n = 1,9$ environ. Ainsi l'ouverture de la lunette ne sera presque que la moitié de celle du télescope d'égale longueur, & l'oculaire étant d'autant plus grand, les amplifications seront entr'elles comme 10 à 19.

16. Pour trouver quelle seroit la longueur d'une lunette ordinaire dont les deux confusions produiroient un angle égal au fond de l'oeil, il n'y a qu'à déterminer F par l'équation: $\frac{\omega}{5,5f} = \frac{\omega^3}{10.FFf}$, laquelle donne $FF = \frac{11.\omega\omega}{2}$, ou $F = \omega\sqrt{(5,5)}$. Or dans ces lunettes on a $\omega = \sqrt{\frac{F}{40}}$ (art. 8.), donc $F = \sqrt{\frac{55}{400}F}$, ou $F = \frac{11^2}{80^2}$ pouces, ce qui supposeroit F excessivement petit. Mais, si l'on cherche quel seroit dans ce cas le degré d'ouverture d'un objectif bi-convexe isoscele de verre commun pour une telle lunette, ayant ici le rayon de courbure $r = 1,1\,F$, on aura $r = \frac{\omega}{1,1}\sqrt[4]{5,5}$: donc la demi-ouverture sera au rayon comme 55 à $\sqrt{55000}$, ou comme 11 à $\sqrt{(2200)}$, c'est à dire, d'environ 13 degrés & demi.

17. Le rapport de longueur des lunettes ordinaires & des télescopes équivalens n'est point constant; plus ces instrumens sont courts, plus le rapport de leurs longueurs se rapproche de l'égalité: il n'est

n'est que comme 6 à 1 pour une lunette de 3 pieds, & il est comme 30 à 1 pour une lunette de 200 pieds. La raison en est encore dans la différente nature des confusions de ces instrumens. Dans la lunette, c'est la confusion de réfrangibilité qui doit être constante par les raisons que nous avons déduites. Or l'aberration de réfrangibilité croit en raison directe du foyer de l'objectif, ou de la longueur de la lunette; pour compenser cet accroissement, il faut donc allonger à proportion le foyer de l'oculaire; ce qui diminue d'autant l'amplification.

Pour déterminer en général le rapport de longueur entre ces lunettes & les télescopes catoptriques équivalens, on a, par le rapport des angles de confusion (art. 8. & 7.) $\frac{\omega}{55f} : \frac{\omega'^3}{128\,F'F'f'}$ $= 2400 : 121$; donc $\frac{44\omega}{f} = \frac{375\,\omega'^3}{F'F'f'}$, & substituant pour ω, & ω', leurs valeurs en F, F' pieds, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{120}}$, & $\frac{2}{5}\sqrt[4]{\frac{F'^3}{120}}$, on a $110 f'\sqrt{\frac{F}{120}} = f\sqrt[4]{120F'}$, ou $110^4\,FFf'^4 = 120^3\,F'f^4$: or, à cause des effets égaux, on a $F'f = Ff'$; reste $110^4 f'^3 F = 120^3 f^3$; mais on a en pieds (art. 7. & 8.) $f = \frac{11}{20}\sqrt{\frac{F}{120}}$, & $f' = \frac{\sqrt[4]{120F'}}{200}$, ce qui substitué donne $110^4\,F'^3 = 120^3\,FF$. Ainsi le quarré de la longueur d'une lunette ordinaire est au cube de la longueur du télescope équivalent, comme 73205 à 864, c. à d. comme 84,728 à 1; ou en nombres ronds comme 85 à 1. On a donc $F = 9,2\sqrt{F'^3}$, & $F' = 0,22768\sqrt[3]{FF}$; $= \frac{\sqrt[3]{FF}}{4,4}$.

18. Reste à comparer les lunettes achromatiques à ces deux instrumens. Comme ces lunettes sont censées n'avoir d'autre confusion

 sensible

sensible que celle de sphéricité, & que cette espece de confusion est environ vingt fois plus nuisible que celle des couleurs (art. 9.), il paroit naturel d'en conclure qu'une lunette achromatique dont l'angle de confusion n'excedera pas trois minutes, doit équivaloir quant à l'effet à un télescope catoptrique d'égale longueur, & à une lunette ordinaire de la longueur correspondante que nous venons de déterminer. Il en résulteroit encore que, si la lunette achromatique avoit une confusion beaucoup moindre que de trois minutes, elle pourroit surpasser de beaucoup l'effet d'un télescope de même longueur, & par conséquent aussi l'effet d'une lunette ordinaire équivalente à ce télescope. Il semble enfin que, si la confusion de cette lunette achromatique étoit absolument nulle, ce qu'il paroit n'être rien moins qu'impossible d'effectuer, elle devroit l'emporter quant à l'effet sur le télescope le plus long, & à plus forte raison encore sur une lunette dioptrique ordinaire d'une longueur immense.

Cependant Mr. d'Alembert, en prenant la lunette de Mr. Antheaume pour terme de comparaison, a fait voir que les résultats qu'on trouve en comparant ainsi les lunettes achromatiques aux deux autres instrumens, s'écartent beaucoup de l'observation. Il faut à la vérité remarquer que la lunette que Mr. Antheaume a construite sur les dimensions de Mr. Clairaut, quoique très bonne, est encore fort au-dessous de celles que Mr. Dollond le fils exécute aujourd'hui; il s'est d'ailleurs glissé quelques méprises dans les calculs numériques de Mr. d'Alembert: mais il n'en est pas moins vrai que la comparaison entre les lunettes achromatiques & les autres, ne peut se soutenir que jusqu'à un certain point, au delà duquel elle doit nécessairement être illusoire si on l'appuie sur le rapport des aberrations. C'est ce qui mérite d'être discuté plus en détail.

19. Si la lunette de M. Antheaume avoit eû une ouverture égale à la douzieme partie de la distance focale de l'objectif, j'ai montré dans mon premier Mémoire (art. 39. Mém. Tom. XVIII.) que

que ſon aberration longitudinale auroit été $= \frac{29.\,F''}{100000}$; par conſéquent elle auroit produit un angle de confuſion $= \frac{29.\,F''}{4800000\,f''}$, & comme cette lunette groſſit 120 fois, le ſinus de cet angle ſeroit $\frac{29}{40000} = 0.000725$, lequel répond à un angle de $2\frac{1}{2}$ minutes; ce qui ne differe gueres de l'angle conſtant du téleſcope catoptrique.

Pour trouver ſelon la méthode de Mr. d'Alembert la longueur du téleſcope équivalent à cette lunette, il n'y a qu'à ſuppoſer les angles de confuſion égaux, & l'on a

$$\frac{29.\,F''}{4800000\,f''} = \frac{\omega'^3}{128.\,F'F'f'}.$$

Or $\omega' = \frac{2}{5}\sqrt[4]{\frac{F^3}{120}}$ en pieds, (art. 7.)

donc $\frac{29.\,F''}{4800000\,f''} = \frac{8.\sqrt[4]{F'}}{125.128.\,f'\sqrt[4]{(120^3)}} = \frac{F'}{125.16.\,f'\sqrt[4]{120^3 F^3}}$;

& puiſque $\frac{F''}{f''} = \frac{F'}{f'}$, lorsque les amplifications ſont égales de part & d'autre, on a

$$125 \times 16 \times 29.\sqrt[4]{120^3 F^3} = 4800000,$$

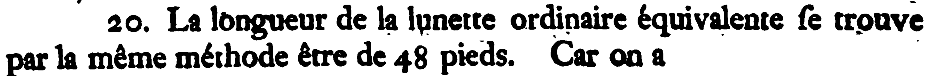
donc

$$F' = \sqrt[3]{\frac{2400^4}{29^4.\,120^3}} = \frac{20}{29}\sqrt[3]{\frac{2400}{29}} = \frac{20 \times 4,3578}{29} = 3 \text{ pieds.}$$

Si Mr. d'Alembert n'a trouvé que $2\frac{1}{2}$ pieds, ce qui s'accorderoit mieux avec l'effet de la lunette de Mr. Antheaume, qui produit à peu près l'effet d'un téleſcope de $2\frac{1}{2}$ pieds, c'eſt qu'il a pris 5000 pour 8^4, ſubſtitution qui dans ce cas-ci n'eſt pas aſſez approchée.

20. La

20. La longueur de la lunette ordinaire équivalente se trouve par la même méthode être de 48 pieds. Car on a



$$\frac{\omega}{55.f} = \frac{29\,F''}{4800000\,f''},$$

& ayant en pieds

$$\omega = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{F}{120}} \text{ (art. 8.)}$$

on aura

$$\frac{F}{110.f\sqrt{120F}} = \frac{29\,F''}{4800000\,f''};$$

donc

$$F = \frac{480000^2}{11^2.\,120.\,29^2} = 18781 \text{ pieds.}$$

Mais, puisque la confusion de couleurs peut être 20 fois plus grande que celle de sphéricité sans nuire à l'effet de la lunette, il faut diviser le nombre trouvé 18781, par le quarré de 20; & l'on aura la véritable longueur de la lunette ordinaire équivalente

$$F = \frac{4800000^2}{11^2 \times 120 \times 29^2 \times 20^2} = \frac{18781}{400} = 47 \text{ pieds,}$$

ou plus exactement $F = \frac{18781}{393} = 47,8$ pieds.

21. On auroit trouvé cette même longueur par la formule de comparaison entre les télescopes catoptriques & les lunettes ordinaires (art. 17.) $F = 9,2\sqrt{F'^3}$, qui donne ici $F = 9,2\sqrt{3^3}$ $= 47,8$ pieds.

22. Tout ce qui résulte de cette comparaison c'est que si la lunette achromatique de Mr. Antheaume avoit une ouverture de 7 pouces, son aberration réguliere lui permettroit de produire une amplification d'environ 138 fois en diametre; ce qui est l'effet d'une lunette ordinaire de 48 pieds, & d'un télescope catoptrique de 3 pieds. Or cet

cet effet, dans une lunette de 7 pieds, feroit encore au dessous de l'effet d'une lunette achromatique de Dollond, plus courte de moitié que celle de Mr. Antheaume.

23. Mais, comme l'ouverture de cette derniere lunette n'est effectivement que la 28e partie de la distance focale, & que c'est pour une ouverture $\omega = \frac{F}{12}$ que j'ai trouvé l'aberration longitudinale $= 0.000029\,F$, il faut faire une nouvelle réduction. On sait que les aberrations de longueurs sont entr'elles à très peu près comme les quarrés des ouvertures; ainsi l'aberration effective est à l'aberration calculée, comme le quarré de 3 pouces d'ouverture au quarré de 7 pouces d'ouverture, c. à d. comme 9 à 49, ce qui la donne $= 0{,}000053\,F$. Ainsi l'angle de confusion de la lunette d'Antheaume n'est effectivement que $\frac{53.\,F''}{4.\,28.\,1000^2.\,f''}$, & ayant $\frac{F''}{f''} = 120$, il est $= \frac{53.\;3}{2800000} = 0{,}00005678$, ce qui répond à un angle de 12 secondes.

L'équation pour le télescope équivalent sera (art. 9.) en pieds

$$\frac{53}{4.\,28.\,1000^2} \times \frac{F''}{f''} = \frac{1}{125.\,16.\,\sqrt[4]{(120^3 F'^3)}} \times \frac{F'}{f'},$$

ou $$56000 = 53\sqrt[4]{(120^3\, F'^3)},$$

donc $$F' = \tfrac{1}{120}\sqrt[3]{\left(\frac{56000^4}{53^4}\right)} = 89, \tfrac{2}{3} \text{ pieds.}$$

24. Le calcul de Mr. d'Alembert ne donne à la vérité ici que 4 pieds, au lieu de 90, pour la longueur du télescope comparé; mais c'est parce qu'il a oublié de réduire l'aberration longitudinale de la lunette achromatique sur l'ouverture d'un 28me du foyer. Car il est au

 reste

reste aisé de concevoir pourquoi le télescope de comparaison qui n'auroit que 3 pieds de long, si la lunette d'Antheaume avoit une ouverture de 7 pouces, doit avoir près de 90 pieds, lorsque l'ouverture de la lunette comparée n'est que de 3 pouces. On sait que les diametres apparens de la confusion qui nait de la sphéricité sont comme les cubes des ouvertures; l'angle de confusion de la lunette achromatique est donc diminué en raison du cube de 7 au cube de 3, c. à d. en raison de 127 à 10. Mais dans le télescope cet angle est constant; ainsi pour que l'équation subsiste, il faut que l'amplification du télescope soit augmentée d'autant. Or le télescope de 3 pieds amplifioit 138 fois; celui-ci doit donc amplifier 138 x 12, 7, ou 1753 fois; & c'est là l'effet d'un télescope de $89\frac{2}{3}$ de pieds; car on a

$$f' = \frac{\sqrt[4]{F'}}{\sqrt[4]{ca^3}} = \tfrac{1}{200}\sqrt[4]{120F'} \text{ pieds, (art. 7.)}$$

& posant $F' = 89\frac{2}{3}$ on a

$$f' = \frac{\sqrt[4]{120 \times 89\frac{2}{3}}}{200} = \frac{\sqrt[4]{10760}}{200},$$

donc le grossissement

$$\frac{F'}{f'} = \frac{89.\frac{2}{3} \times 200}{\sqrt[4]{10760}} = \frac{17933}{\sqrt[4]{10760}} = 1760.$$

25. La lunette ordinaire équivalente à cette lunette achromatique se trouve par l'équation: $\frac{\omega}{20.\,55.\,f} = \frac{53}{4.\,28.\,1000^2}\;\frac{F''}{f''}$ en mettant pour ω sa valeur $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{120}}$ en pieds (art. 8.) & posant $\frac{F}{f} = \frac{F''}{f''}$, $\frac{1}{2.\,20.\,55.\sqrt{120F}} = \frac{53}{4.\,28.\,1000^2}$, d'où l'on tire

tire $F = \frac{(56000)^2}{120 . 11^2 . 53^2} = 7688$ pieds. On auroit trouvé plus exactement cette valeur par la formule qui compare les télescopes aux lunettes ordinaires $F = 9,2 \sqrt{F'^3}$ (art. 17.) qui donneroit ici $F = 9,2 \sqrt{89,681^3}$ pieds $= 7813$ pieds.

26. Dans les lunettes dioptriques ordinaires on a en pieds

$$f = \tfrac{11}{20} \sqrt{\frac{F}{120}} \text{ (art. 8.); donc ici}$$

$$f = \tfrac{11}{20} \sqrt{\tfrac{7688}{120}} = \tfrac{11}{20} \sqrt{64,06},$$

donc le grossissement de la lunette équivalente sera

$$\frac{F}{f} = \frac{7688 . 20}{11 . \sqrt{(64,066)}} = 1746.$$

Si l'effet de cette lunette n'est pas précisément équivalent à celui du télescope (art. 24.), la petite différence résulte de ce que le rapport des deux confusions hétérogenes n'est pas exactement quant à l'effet comme 20 à 1, mais comme 2400 à 121 (art. 9.); aussi en prenant la valeur exacte de $F = 7813$ pieds, on trouve

$$\frac{F}{f} = \tfrac{20}{11} \sqrt{(7813 . 120)} = 1760.$$

Il n'est pas besoin d'ajouter que si l'on vouloit supposer les deux confusions également nuisibles, on trouveroit la lunette ordinaire encore 400 fois plus longue.

27. Il est remarquable, pour l'observer en passant, combien l'effet des lunettes ordinaires diminue à mesure qu'on les allonge; ici, par exemple, la lunette seroit 4 fois plus longue en pieds, qu'elle ne multiplieroit de fois le diametre apparent de l'objet; tandis qu'une lunette de 4 pieds multiplie ce diametre 40 fois; & par conséquent 10 fois plus qu'elle n'occupe de pieds en longueur. On voit par les tables, & il seroit aisé de le déduire de nos formules, que le cas où ces

ces deux choſes ſont égales, c'eſt lorsque la lunette auroit une longueur d'environ 400 pieds. Ce cas n'arriveroit à l'égard des téleſcopes catoptriques que lorsqu'on auroit $\frac{F'}{f'} = F'$ pieds, & ayant

$$f' = \frac{1}{100} \sqrt[4]{120 F'} \text{ pieds, (art. 7.)}$$

il faudroit que l'on eût $F' = \frac{200^4}{120}$, c. à d. que la longueur du téleſcope fut de $13\frac{1}{3}$ millions de pieds; d'où l'on peut conclure la prodigieuſe ſupériorité des téleſcopes ſur les lunettes dioptriques ordinaires, à meſure que leurs longueurs reſpectives augmentent.

28. L'angle de confuſion de la lunette d'Antheaume, en ſuppoſant qu'elle groſſit 120 fois, n'eſt que de 12 ſecondes (art. 23.), tandis que l'angle conſtant de confuſion dans le téleſcope eſt d'environ 172 ſecondes (art. 7.), & par conſéquent $14\frac{1}{3}$ fois plus grand. Ainſi, pour rendre ces deux angles égaux, il faudroit que le groſſiſſement de la lunette achromatique fût environ $14\frac{1}{3}$ fois plus grand qu'il n'eſt, c. à d. qu'elle amplifiât environ 1720 fois. Mr. d'Alembert trouve au contraire qu'en ce cas-là ſon amplification ſeroit diminuée de 120 à 85. Mais c'eſt une ſuite de la mépriſe que j'ai indiquée (art. 24.). En effet en égalant les angles de confuſion $\frac{53}{4.28.1000^2} \times \frac{F''}{f''}$ de la lunette achromatique & $\frac{1}{1200}$ du téleſcope, on a (art. 23. & 7.)

$$\frac{53}{4.28.1000^2} \; \frac{F''}{f''} = \frac{1}{1200},$$

donc $\frac{F''}{f''} = \frac{280000}{159} = 1750.$

29. Le réſultat de toutes ces comparaiſons eſt, 1°. qu'en admettant que la confuſion de ſphéricité eſt 393 fois plus nuiſible à l'effet des inſtrumens optiques que la confuſion de réfrangibilité, la comparaiſon

paraiſon ſe ſoutient conſtamment entre le téleſcope & la lunette ordinaire. 2°. qu'au moyen de cette diſtinction, on pourroit encore également comparer l'une & l'autre aux lunettes achromatiques, ce qu'il ſeroit impoſſible de faire autrement, puiſque l'angle de confuſion de la lunette achromatique ne ſauroit être à la fois égal à deux angles conſtans dont l'un eſt 19, 834 fois plus grand que l'autre. 3°. que cependant cette comparaiſon, ſi on l'établit uniquement ſur l'égalité des angles de confuſion, devient illuſoire à l'égard des lunettes achromatiques, & doit néceſſairement conduire à des réſultats abſurdes, parce que par la nature même de ces lunettes elles n'ont ni ne peuvent avoir l'angle de confuſion conſtant, & que ſi elles étoient portées au plus haut degré de perfection, cet angle ſeroit abſolument nul.

30. En effet le raiſonnement ſur lequel cette comparaiſon eſt établie ſe réduit à cet argument; puiſque l'angle de confuſion d'une lunette achromatique qui groſſit 120 fois, eſt 14 à 15 fois plus petit que l'angle conſtant de confuſion homogene d'un téleſcope catoptrique, cette lunette doit être capable de produire un effet 14 à 15 fois plus grand que celui qu'elle produit actuellement, & par conſéquent elle eſt équivalente à un téleſcope de 89 pieds, ou à une lunette de 7688 pieds, qui groſſiſſent toutes deux à peu près $14\frac{1}{3} \times 120$ fois. Cet argument ſeroit concluant ſi 1°. la nature des inſtrumens optiques comportoit une amplification de 1760 fois en diametre avec un objectif dont la diſtance focale ne ſeroit que de 7 pieds, & 2°. ſi ce ſurcroît d'amplification pouvoit avoir lieu ſans augmenter l'ouverture qui n'étoit que de 3 pouces, ou ſi en augmentant cette ouverture on n'augmentoit point l'angle de confuſion, ſur la petiteſſe duquel tout le calcul de cette comparaiſon eſt fondé. Mais ni l'une ni l'autre de ces conditions n'eſt poſſible. Une lunette de 7 pieds qui amplifieroit 1760 fois, devroit avoir un oculaire de demi-ligne de foyer; & quand cela ſe pourroit, le champ de viſion ſe réduiroit à 2 minutes, tout au plus. Enſuite, ſoit qu'on donne à l'ouverture la 36e ou la 42e partie de l'amplification en pouces, il faudroit qu'elle fût ici tout au moins de 42 pouces, c. à d. 14 fois plus grande que dans la lunette

nette d'Antheaume; ainsi l'angle de confusion de cette lunette seroit augmenté en raison du cube de 14, donc 2744 fois; ce qui rendroit l'instrument tout à fait défectueux. Si, d'un autre côté, pour conserver à cette lunette son premier angle de confusion sur lequel on a calculé l'effet dont elle doit être capable, on laisse le rapport de 1 à 28 entre l'ouverture & la distance focale de l'objectif, il faudra, pour avoir la clarté nécessaire, que la longueur de la lunette soit tout au moins de 28 fois 42 pouces, & par conséquent de 108 pieds. Mais alors, ce ne seroit plus la lunette de 7 pieds de Mr. Antheaume, ce seroit une lunette achromatique 15 fois plus longue, & qui produiroit un effet 15 fois plus grand. L'une ne seroit pas plus excellente que l'autre en son espece; & celle de Mr. Antheaume seroit même à divers égards préférable à la derniere.

31. Pour mieux concevoir le défaut de cette maniere de comparer les lunettes achromatiques aux autres instrumens optiques, il n'y a qu'à faire attention que, puisqu'à l'aide de deux especes de verre il est très aisé de construire des objectifs dont l'aberration longitudinale des rayons dans l'axe seroit négative, il est très possible aussi de rendre cette aberration exactement nulle. Or en ce cas-là il est évident que l'angle de confusion dans l'œil, qu'on considere ici, seroit nul aussi: donc, en vertu de l'équation de comparaison, on devroit conclure qu'une lunette achromatique d'une longueur quelconque avec un tel objectif seroit équivalente à un télescope catoptrique d'une longueur infinie, ou à une lunette ordinaire d'une longueur plus qu'infinie.

32. Soit en général l'aberration dans l'axe d'une lunette achromatique $= \alpha F''$, son angle de confusion sera $= \frac{\alpha F'' \omega''}{4 F'' f''} = \frac{\alpha \omega''}{4 f''}$, & si le rapport de l'ouverture à la distance focale est $\omega'' = \frac{F''}{n}$, cet angle sera $= \frac{\alpha}{4n} \times \frac{F''}{f''}$; qu'on le suppose égal à l'angle constant de

nos

confusion d'un télescope catoptrique équivalent, on aura $\frac{\alpha}{4n} \times \frac{F''}{f''}$ $= \frac{\omega^3}{128 F' F' f'} = \frac{8}{128.\ 125.\ \sqrt[4]{(120 F'^3)}} \times \frac{F'}{f'}$, F' étant en pieds (art. 8.); donc, ayant par l'hypothese $\frac{F'}{f'} = \frac{F''}{f''}$, on aura

$$F' = \sqrt[3]{\left(\frac{n^4}{120\,(500\,\alpha)^4}\right)} \text{ pieds:}$$

donc, si $\alpha = 0$, on aura $F' = \infty$.

33. La raison pourquoi cette maniere de comparer les instrumens optiques est applicable aux télescopes & aux lunettes ordinaires, & qu'elle ne l'est pas aux lunettes achromatiques, c'est que dans ces premiers instrumens il y a des rapports nécessaires entre les ouvertures & les distances focales de l'objectif & de l'oculaire, rapports qui résultent, comme je l'ai indiqué (art. 6. & 8.) de la constance de l'angle de confusion, & de la clarté nécessaire. Dans les lunettes achromatiques au contraire, il n'y a que ce dernier rapport entre l'ouverture & le grossissement qui soit nécessaire; mais le grossissement ne détermine point ici comme dans les deux autres instrumens la longueur de la lunette achromatique: & c'est néanmoins du rapport de la longueur au grossissement que dépend proprement la perfection de l'instrument. Ainsi une lunette achromatique sera équivalente au télescope catoptrique si, à longueurs égales, elle amplifie autant que celui-ci; elle lui sera inférieure, si elle grossit moins; & elle lui sera supérieure en perfection, si elle grossit davantage. C'est la seule maniere de comparer ces instrumens qui puisse leur être applicable.

34. La lunette achromatique de Mr. Antheaume avec un foyer de 7 pieds grossit 120 fois. Un télescope de 7 pieds grossit 260 fois. Ainsi les degrés de perfection de ces deux instrumens sont comme 6 à 13 & la lunette vaut la moitié moins que le télescope. Mais ce cas in-

individuel ne doit pas décider de la préférence entre les deux eſpeces d'inſtrumens, puiſqu'on a des lunettes achromatiques qui égalent en groſſiſſement les téleſcopes de même longueur, & qu'il n'eſt pas impoſſible de les perfectionner encore davantage, ſurtout en perfectionnant la matiere des verres.

35. Nous venons de voir l'effet comparé que la lunette de Mr. Antheaume produit actuellement: cherchons maintenant celui qu'elle auroit dû produire par ſa petite aberration en vertu des principes établis ci-deſſus. Il n'y a rien d'abſolument déterminé dans cette lunette que la diſtance focale de ſon objectif, qui réſulte des rayons ſur leſquels les baſſins ont été travaillés; le groſſiſſement dépend de la perfection de l'objectif, & l'ouverture dépend du groſſiſſement: que cette ouverture ſoit en pouces, comme dans les téleſcopes, la $41\frac{2}{3}$e partie du groſſiſſement, & ſuppoſons qu'elle ſoit en même tems la ne partie de la diſtance focale F'; enfin poſons pour baſe que l'angle de confuſion dans l'œil peut aller, comme dans le téleſcope, à 172 ſecondes ſans défigurer l'image de l'objet, nous aurons l'équation

$$\frac{\alpha F''}{4} \times \frac{\omega''}{F''} \times \frac{1}{f''} = \text{ſin } 172'' = \frac{1}{1200} \text{ (art. 7.)}$$

donc $\frac{\alpha F''}{4nf''} = \frac{1}{1200}$, & ayant $\frac{F''}{f''} = \frac{125\,\omega''}{3}$, (par la premiere ſuppoſition) on a $\frac{125.\,\alpha\omega''}{12n} = \frac{1}{1200}$, ou $125.\,\alpha\omega'' = \frac{n}{100}$; $\alpha\omega'' = \frac{n}{12500}$; mais $\omega'' = \frac{F''}{n} = \frac{7.\ 12}{n}$ en pouces; donc

$$\alpha = \frac{nn}{84.\ 12500}.$$

Or, quand $n = 28$, on a $\alpha = \frac{53}{100000}$ (art. 24), & α croît ou décroît comme le cube de l'ouverture, c. à d. en raiſon inverſe du cube de n.

J'ai

J'ai donc $n^3 : 28^3 = \frac{53}{1000000} : a$,

donc $a = \frac{28^3 \cdot 53}{n^3 \cdot 1000^2} = \frac{nn}{84 \cdot 12500}$,

donc $n^5 = \frac{28^3 \cdot 53 \cdot 84 \cdot 125}{10000} = 1221621$, & $n = 16,5$.

Ainsi, d'après son angle de confusion actuel, cette lunette auroit dû avoir une ouverture $\omega'' = \frac{84}{16,5} = 5,09$ pouces; & auroit dû amplifier $5,09 \times 41\frac{2}{3} = 212$ fois; ce qui suppose que la distance focale de son oculaire auroit été de $4\frac{3}{4}$ lignes. Il est donc démontré que l'aberration de cette lunette, toute petite qu'elle est, empêche qu'elle n'eût pû être équivalente à un télescope catoptrique d'égale longueur, lequel grossit au delà de 260 fois; cette lunette seroit par conséquent bien éloignée de pouvoir produire l'effet d'un télescope de 89 pieds, que le calcul de comparaison donne.

35. Il resteroit à découvrir pourquoi cette lunette ne produit pas l'effet entier que sa petite aberration lui permettoit de produire. On en peut assigner diverses raisons. 1°. Si quelques causes physiques inconnues exigent que les instrumens dioptriques ayent, à amplifications égales, une plus grande ouverture que les instrumens catoptriques, & cela en raison de 7 à 6, comme les Opticiens l'ont établi; il est clair que la lunette de Mr. Antheaume n'a pas même pû produire une amplification de 212 fois, mais seulement de 181 fois; ce qui se rapproche déjà d'un septieme de l'effet actuel. 2°. Il est très probable qu'un instrument dioptrique ne permet pas un si grand angle de confusion qu'un instrument catoptrique, puisque, plus l'image est éclairée, plus les cercles de confusion à diametres égaux doivent être sensibles. 3°. Ces angles ne renferment que l'aberration réguliere de sphéricité; or, dans les lunettes dioptriques & par des objectifs à plusieurs faces, il peut y avoir encore bien des aberrations irrégulieres, dont la plûpart dépendent de causes physiques, de la matiere même du verre que les rayons

 ont

ont à traverser, ou aussi, de leur diverse réfrangibilité; ce qui doit plus augmenter la confusion de l'objet apperçu par la lunette, que de l'objet vu par le télescope catoptrique. 4°. Dans le calcul de l'aberration, l'épaisseur de l'objectif est négligée; ce qui dans la comparaison avec le télescope, où cette épaisseur n'entre pour rien, n'est pas absolument exact, surtout lorsque l'ouverture de la lunette doit être grande pour produire tout son effet, & qu'il y a des rayons de faces fort petits. 5°. L'aberration sur laquelle on détermine l'angle de confusion dans l'oeil, n'est que l'aberration du point de l'objet dans l'axe; celle des points hors de l'axe n'y entre pas. Or celle-ci peut être beaucoup plus considérable dans la lunette que dans le télescope, puisque le champ visible est pour l'ordinaire plus grand dans les lunettes achromatiques que dans les télescopes catoptriques; & aussi, parce que les diverses réfractions par plusieurs faces produisent toujours quelques aberrations irrégulieres. 6°. L'objectif de Mr. Antheaume a en particulier le défaut d'avoir deux faces dont le rayon n'est que de 15 pouces; si l'on avoit donné à cette lunette l'ouverture de 5 pouces, que son plus grand effet exige, elle eût été le tiers du rayon; & la courbure de chacune de ces deux faces auroit embrassé un arc de 19 degrés: ce qui rend les aberrations hors de l'axe & les autres aberrations irrégulieres, beaucoup plus sensibles. Il n'est pas étonnant après cela que cette lunette n'ait produit que les deux tiers, ou les quatre septiemes, de l'effet qu'on s'en pouvoit promettre.

II.

Sur les proportions les plus avantageuses, dans les lunettes achromatiques, entre l'ouverture & les distances focales de l'objectif & de l'oculaire.

36. La recherche que je me propose de faire ici, est indispensable pour atteindre au plus haut degré de perfection des lunettes achromatiques; & c'est de ce but seul que nous devons tirer la détermination des meilleures proportions possibles.

J'ai montré dans la recherche précédente (art. 7. 8.) que, par rapport aux lunettes dioptriques ordinaires & aux télescopes catoptriques, les deux conditions essentielles, la netteté & la clarté de l'image, déterminoient absolument les trois rapports de ω à F, de ω à f, & de F à f. Dans les lunettes achromatiques ce n'est plus cela: la condition de la clarté suffisante de l'image doit subsister à la vérité pour tous les instrumens optiques; & par conséquent le rapport de l'ouverture au grossissement est encore ici constant. Mais, si l'on peut anéantir les aberrations, par la simple combinaison des verres, & par la proportion des faces de l'objectif achromatique, il n'y a plus d'angle de confusion, & la condition de la netteté de l'image sera remplie, sans qu'elle établisse de rapports fixes entre l'ouverture & les foyers. Ainsi, dans cette supposition que l'angle de confusion est déjà sensiblement nul, on est encore libre de choisir les rapports les plus propres à augmenter la perfection de cet instrument. Or, après la netteté & la clarté de l'image, il ne reste rien à désirer dans une lunette, si ce n'est qu'elle soit la plus courte que possible pour une amplification donnée, & qu'elle embrasse tout le champ que cette amplification comporte. L'amplification résulte du rapport des foyers de l'objectif & de l'oculaire; si l'on obtient le plus grand effet en augmentant le foyer de l'objectif, on allonge nécessairement d'autant la lunette; si on cherche à obtenir ce plus grand effet par la petitesse du foyer de l'oculaire, il ne pourra embrasser qu'un très petit champ. On peut, il est vrai, y remédier en doublant ou triplant les oculaires, & en plaçant une lentille convexe dans le foyer de l'objectif; mais il y aura toujours un *maximum* au delà duquel il ne convient pas d'aller. Supposons qu'il faille donner à l'ouverture de la lunette achromatique le même rapport constant de $\frac{11}{400}$, qu'elle a au grossissement dans les lunettes ordinaires, on aura $\omega'' : \frac{F''}{f''} = 11 : 400$; donc $400.\ \omega'' f'' = 11\ F''$, ou $\omega'' = \frac{11.\ F''}{400.\ f''}$. Que le plus petit oculaire admissible dans la pra-

pratique pour conſerver un champ de quelque étendue, ſoit d'un foyer de trois lignes & un tiers, ou de $0'', 28$, on aura le rapport de ω'' à F'' en pouces $= 11.112$, ou $\omega'' = \frac{F''}{10,18}$.

37. Mais, ſi l'on rétrécit l'ouverture ſur le rapport qu'elle a au groſſiſſement dans le téleſcope, on aura $\omega'' = \frac{3F''}{125 . f''}$, & poſant toujours $f'' = 0, 28$ pouces, on aura $\omega'' : F'' = 3.44$, ou $\omega'' \frac{F''}{14,66}$ en pouces.

J'ai choiſi, dans mes Mémoires précédens, le milieu entre ces deux rapports, en prenant l'ouverture égale à la douzieme partie du foyer de l'objectif; & j'ai crû ce rapport d'autant plus convenable que c'eſt celui qu'a ſuivi Mr. Dollond le fils dans les plus excellentes lunettes qu'on ait jusqu'à préſent de lui: je ne répéterai pas ce que j'ai dit à ce ſujet (Mém. de l'Ac. Tom. XVIII. pag. 351.). Par cette méthode, le foyer de l'oculaire reſte conſtant pour les lunettes de diverſes longueurs, comme Mr. d'Alembert l'a très bien remarqué. Ce qui donneroit aux lunettes achromatiques un avantage bien grand ſur les lunettes ordinaires & même ſur les téleſcopes, c'eſt que l'effet ſeroit toujours proportionné à la longueur de l'inſtrument, au lieu que dans les lunettes ordinaires il ne répond qu'à la racine quarrée de l'allongement, puisqu'ayant partout $\frac{F}{f} = \omega a$, on y a $\omega = \sqrt{\frac{Fc}{a}}$ (art. 8.); donc $\frac{F}{f} = \sqrt{(acF)}$.

Dans le téleſcope, on a $\omega' = \sqrt[4]{\frac{F'^3 c}{a'}}$, donc $\frac{F}{f'} = F^{\frac{3}{4}} a^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{4}}$; ainſi l'effet ne répond qu'à la racine biquarrée du cube de l'allongement.

38. Pour

38. Pour juger de la plus grande perfection poſſible des lunettes achromatiques, il eſt à propos de rechercher en général juſqu'où l'on peut eſpérer de porter l'effet des inſtrumens optiques. Plus l'effet de ces inſtrumens augmente, plus le champ de l'objet viſible diminue néceſſairement, puisque la vue ne peut embraſſer qu'un certain nombre de degrés à la fois, qu'on eſtime ordinairement être de 90. Or, comme les extrémités du champ apperçu ſont toujours moins diſtinctes que le milieu, ſi l'on donnoit à ce champ une étendue de moins de deux minutes, pour avoir le plus grand effet, il eſt probable qu'on ne pourroit preſque rien diſtinguer dans l'objet. En poſant donc le demi-champ viſible à 1 minute, on a tang $1'$: ſin.tot. $1 = f : F$, ou $0{,}00029 : 1 = f : F$, donc $\frac{F}{f} = \frac{100000}{29}$. Ainſi le plus grand effet abſolument poſſible d'un inſtrument optique ſeroit de groſſir environ 3400 fois le diametre d'un objet. Si l'on pouvoit donc obtenir cet effet avec un oculaire de 0.28 pouces, ce ſeroit au moyen d'une lunette achromatique de 80 pieds. Un téleſcope capable de produire ce même effet devroit être long de 218 pieds; car on auroit $\frac{F'}{f'} = 3437$, & puisqu'on a dans le téleſcope $f' = \frac{1}{200} \sqrt[4]{120 F'}$ pieds (art. 7.) on aura $F' = 17{,}18 \sqrt[4]{(120 F')}$; donc $F'^3 = 17{,}18^4 . 120$, & $F' = 218$ pieds; & par conſéquent la lunette ordinaire équivalente auroit par la formule $F = 9{,}2 \sqrt{F'^3}$ (art. 17.) une longueur de preſque 29750 pieds. Il eſt bien certain qu'on ne conſtruira jamais ni lunette de 30 mille pieds ni téleſcope de 200 pieds. Mais il n'eſt gueres probable non plus qu'on réuſſiſſe à faire des lunettes achromatiques de 80 pieds: il faudroit pour cet effet que le diametre de l'objectif fût de 80 pouces, & quand aucun des rayons des faces ne ſeroit plus court que la diſtance focale, l'épaiſſeur de chaque len-

 tille

tille isoscele seroit d'un pouce & deux tiers; ce qui rend l'exécution impossible. On parviendra très difficilement à fondre des morceaux de verre propres à en faire des lentilles d'une épaisseur au delà de 4 à 5 lignes; or, en supposant qu'aucun des rayons des faces ne soit plus court que la moitié de la distance focale, on aura le sinus verse ou la flêche d'une lentille isoscele $= 2\frac{1}{2}$ lignes, la demi-ouverture étant la 24e partie de la distance focale, sera la 12me du rayon de courbure; donc elle répond au sinus de $4^{\circ}.\ 47'$, lequel est à très peu près 24 fois plus grand que le sinus verse correspondant: l'ouverture entiere sera donc de 10 pouces, & par conséquent la plus grande lunette achromatique possible de 10 pieds; cette lunette produiroit un grossissement de 428 fois en diametre, & seroit équivalente à un télescope de 14 pieds, ou à une lunette ordinaire de 500 pieds. Ici la tangente du plus grand demi-champ possible sera $= \frac{1}{428} = 0,\ 002336$. Ainsi le plus grand champ possible seroit alors de 16 minutes.

39. Telles sont vraisemblablement les bornes que l'Optique & la Physique mettront toujours à l'effet des instrumens de la vue. Si néanmoins, par les méthodes que j'ai indiquées dans mon second Mémoire (Mém. de l'Ac. Tom. XIX.), on peut donner au plus petit rayon des faces la longueur du foyer général, on pourra aussi doubler l'effet des lunettes achromatiques. La demi-ouverture sera le sinus 0. 04166 d'un arc de $2^{\circ}.\ 23'$, & par conséquent 48 fois la flêche du même arc: ainsi l'ouverture entiere aura un diametre de $4 \times 12 \times 5$ lignes ou de 20 pouces; la distance focale de l'objectif sera de 20 pieds; l'effet de la lunette, un grossissement de 857 fois en diametre; & le plus grand champ possible, un angle de 8 minutes.

Une lunette ordinaire équivalente seroit de 1850 pieds, car elle auroit $\frac{F}{f} = 857$, & puisqu'on a ici $f = \frac{11}{20} \sqrt{\frac{F}{120}}$ en pieds (art. 8.), on a $F = \frac{857.\ 11}{20} \sqrt{\frac{F}{120}}$;

donc

donc $F = \frac{857^2 . 11^2}{20^2 . 120}$ pieds $= 1851$ pieds,
ce qui répond à un télescope de $34\frac{1}{3}$ pieds, par la formule (art. 17.).

40. Quelque difficulté qu'il y eût de porter la perfection des lunettes achromatiques à ce degré-là, s'il n'y avoit cependant d'autre obstacle que l'épaisseur des verres, il seroit possible d'y remédier, soit en partageant chaque lentille en deux, dont une des faces seroit plane, soit, ce qui vaudroit encore mieux, en multipliant les lentilles de l'objectif, en sorte que le plus court rayon surpassât en longueur la distance focale autant qu'il seroit besoin pour obtenir le plus grand effet. Mais, outre les difficultés de l'exécution qui en seroient considérablement accrues, & la longueur incommode d'une lunette de plus de vingt pieds, c'est qu'il seroit très difficile de donner à ces lunettes le champ entier qu'elles pourroient avoir. J'aurai occasion d'y revenir en parlant des oculaires.

41. Mr. d'Alembert n'approuve pas qu'on donne à l'objectif achromatique une ouverture aussi grande qu'est la douzieme partie de la distance focale: il y a ici deux questions à examiner; 1°. doit-on, dans ces lunettes, mettre un rapport fixe entre l'ouverture & la distance focale? 2°. quel doit être ce rapport? Quant à la premiere question, il est très vrai, comme Mr. d'Alembert l'observe, qu'en mettant un rapport fixe entre ω'' & F'', on s'écarte des regles adoptées dans la construction des lunettes ordinaires & des télescopes; mais ces regles sont une suite nécessaire de l'imperfection de ces instrumens, qui ne permet pas de prendre la distance focale de l'oculaire constante, ni par conséquent de proportionner constamment l'effet à la longueur de l'instrument; au lieu qu'on peut le faire dans les lunettes achromatiques, sous les restrictions que j'ai indiquées dans mon premier Mémoire Art. 6. Tom. XVIII. p. 351. J'estime donc qu'une des grandes perfections d'une lunette étant d'être la plus courte possible, on doit, dès qu'on le peut, proportionner directement l'ouverture à la longueur.

2°. Quant au nombre qui exprime ce rapport, il doit être tel, que dans les lunettes d'une grandeur commode l'ouverture ne soit pas inférieure à celle du télescope d'égale longueur, puisque celui-ci a un angle de confusion déterminé, au lieu que l'on peut diminuer celui de la lunette achromatique. Or l'ouverture d'un télescope de 3 pieds est la onzieme de la distance focale; celle d'un de 5 pieds en est la 12e; celle d'un de 7 pieds en est la 13e; celle d'un de 9 pieds en est la 14e partie. C'est donc entre ces nombres qu'on doit choisir le rapport cherché: j'ai déjà expliqué dans les articles 36 & 37 les raisons qui m'ont fait préférer le rapport de 1 à 12.

42. Au reste, ces proportions supposent, comme on a pû le voir, que l'angle de confusion de la lunette achromatique n'excedera jamais celui du télescope, & qu'il sera toujours au dessous de 3 minutes. Or, en adoptant ces proportions, cet angle ne sauroit être constant dans les lunettes achromatiques; car l'aberration longitudinale de sphéricité étant en raison directe du quarré de l'ouverture & inverse de la distance focale de l'objectif, elle sera en raison directe de cette distance focale dès qu'on prendra $\omega'' = \frac{F''}{n}$. Supposons donc cette aberration de longueur $= a F''$, on aura l'angle de confusion

$$= \frac{a F''}{4} \times \frac{\omega''}{F''} \times \frac{1}{f''} = \frac{a F''}{4 n f''},$$

c. à d. qu'il croitra comme le grossissement, ou (puisque l'oculaire f'' est ici constant) comme la longueur de la lunette achromatique. Il faut donc, dans ces lunettes, rendre le coëfficient de l'aberration longitudinale si petit, qu'étant multiplié par le grossissement qu'on se propose, le produit divisé par $4n$ n'excede pas $\frac{1}{1150}$, qui est le sinus de l'angle constant de confusion de sphéricité tolérable dans le télescope (art. 7.).

Dans nos proportions, ayant $\omega'' = \frac{F''}{12}$, & $f'' = 0''.28$ pouces,

l'angle

l'angle de confuſion de la lunette achromatique eſt $\frac{aF''}{48.0.28} = \frac{aF''}{13,44}$.

Si donc l'on pouvoit ſe permettre dans les lunettes achromatiques le même angle de confuſion qui ſubſiſte dans les téleſcopes, on auroit l'aberration longitudinale inſenſible

$$aF'' = \frac{13,44}{1200} = 0.0112 \text{ pouces} = \tfrac{8}{100} \text{ pouces.}$$

J'ai pris, dans mes Mémoires précédens, pour limite de l'aberration de longueur inſenſible une quantité trois fois plus petite, ſavoir $\tfrac{3}{100}$ pouces, par les raiſons que je dirai plus bas.

43. Mais, ſi l'on ne pouvoit pas ſe flatter de réuſſir à réduire les aberrations par la conſtruction des objectifs achromatiques à une ſi petite quantité, que dans les lunettes de 7 à 8 pieds la confuſion fût moindre que celle du téleſcope, il faudroit ſe réſoudre alors à conſtruire ces lunettes ſur les mêmes proportions qu'on obſerve dans la conſtruction des téleſcopes catoptriques; l'ouverture ne ſeroit plus en raiſon directe de la longueur, mais en raiſon de la racine biquarrée du cube de cette longueur, & l'oculaire ne ſeroit plus conſtant, il croîtroit comme la racine cubique de l'ouverture. (art. 7.) Avec tout cela, ces lunettes ſeroient encore incomparablement meilleures que les lunettes ordinaires, & préférables par la clarté, le champ, & la facilité de l'exécution aux téleſcopes catoptriques.

III.

Sur le plus grand angle de confuſion tolérable dans les lunettes achromatiques.

44. J'ai déjà fait voir, dans mon ſecond Mémoire, que la meſure de cet angle dans les lunettes ordinaires & dans les téleſcopes catoptriques, ne pouvoit pas ſervir ici de regle bien ſûre, & qu'il faudroit pour cet effet connoître exactement les dimenſions d'une excellente lunette achromatique. Depuis ce tems-là, Mr. de la Lande a eu

la bonté de me communiquer les dimenſions qu'il a priſes des trois lentilles d'un objectif achromatique de Mr. Dollond le fils, de $3\frac{1}{2}$ pieds de foyer, qui produit l'effet d'un téleſcope de même longueur. Ces dimenſions, très différentes de celles d'une lunette équivalente de feu M. le Duc de Chaulnes, s'accordent beaucoup mieux avec les forces réfringentes & diſperſantes du verre commun & du criſtal. Mais elles donnent une aberration de longueur de plus de 3 lignes; ce qui formeroit pour cette lunette, en la ſuppoſant équivalente au téleſcope de même longueur, un angle de confuſion de ſphéricité 27 fois plus grand que celui du téleſcope catoptrique; & par conſéquent intolérable. Les dimenſions de cette lunette ſont en lignes $F = 510$, $\omega = 40$, $r = 315$, $r' = 450$, $r'' = 235$, $r''' = 315$, $r^{IV} = r^{V} = 320$, la premiere & la troiſieme lentilles ſont biconvexes de verre commun, la lentille du milieu eſt biconcave de criſtal d'Angleterre. Ainſi l'équation de la diſtance focale eſt:

$$510 = \frac{1}{(m-1)\left(\frac{1}{315}+\frac{1}{450}+\frac{2}{320}\right)-(n-1)\left(\frac{1}{235}+\frac{1}{315}\right)},$$

d'où l'on tire

$$(m-1)\ 0{,}0116468-(n-1)\ 0.0074299 = 0.00196078.$$

Le rapport des diſperſions eſt donc

$$dm : dn = 74299 : 116468 = 1 : 1{,}565,$$

ce qui eſt aſſez conforme à l'expérience, ou du moins au rapport de 2 à 3 adopté par Mr. Dollond.

Si l'on avoit la meſure du foyer particulier des lentilles convexes, on pourroit déterminer exactement la valeur de la force réfringente m du verre commun. En la ſuppoſant, $m = 1{,}53$, l'équation donne $n = 1{,}565$, ce qui n'eſt pas aſſez pour la force réfringente du criſtal. J'ai choiſi les valeurs les plus approchantes de l'expérience qui ſatisfont à cette équation; ſavoir $m = 1{,}541009$, $n = 1{,}582195$.

La

La demi-ouverture $= 20'''$, divifée par chaque rayon, donne les finus des demi-courbures des faces, comme fuit:

fin. C	=	0.063492.	C	=	3°. 38′, 41715.
fin. C′	=	0.050301.	C′	=	2°. 32′, 8384.
fin. C″ = fin. C‴	=	0,06250.	C″ = C‴	=	3°. 34, 99931.
fin. K	=	0.085106.	K	=	4°. 52, 92864,
fin. K′ = fin. C	=	0.063492.	K′	=	3°. 38, 41715.

Le fimple calcul des arcs, qui ne differe dans les petites courbures que de quelques fecondes du calcul exact des finus, donneroit l'angle à l'axe des rayons extremes

$$\Phi'' = (m-1)(C+C'+C''+C''') - (n-1)(K+K')$$
$$= 0.541009 \times 801', 254 - 0.582195 \times 511', 34579.$$
$$= 433', 4837 - 297', 7032 = 2°. 15', 78.$$

Or l'angle au foyer de ces mêmes rayons doit avoir pour tangente $\frac{x}{F} = \frac{2}{51}$, ce qui indique l'angle de mefure $A = 2°. 14', 745.$

Ainfi l'angle d'aberration des rayons extremes $\Phi'' - A$ feroit de 1 minute; je l'ai trouvé moindre de $\frac{1}{5}$e par le calcul exact, favoir de 0, 7944 minutes, comme il a dû l'être, parce que dans cet objectif les courbures concaves, lesquelles diminuent l'aberration, font les plus fortes.

Ayant donc l'angle à l'axe $\Phi'' = 2°. 15', 5396$, la cotangente de cet angle rapportée au finus total $\frac{1}{2}\omega$, qui eft ici $=20$ lignes, donne la diftance de foyer pour les rayons extremes $= 507$ lignes, & par conféquent l'aberration de longueur qui en réfulte $F - 507 = 3$ lignes, à quoi il faut encore ajouter la flêche de la derniere courbure convexe, qui étant le finus verfe d'un arc de 3°. 35′, pour une demi-ouverture de 20 lignes, eft $= 0', 625$ lignes, ce qui donneroit une aberration pofitive longitudinale de 3, 6 lignes; d'où réfulteroit pour un oculaire de 3 lignes, tel qu'auroit un télefcope de cette longueur,

un

un angle de confusion énorme $= \frac{3,6}{4} \times \frac{40}{510} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{85} = 0.023529$; sinus de l'angle de $1°$. 21 minutes.

45. Il est évident qu'avec une telle confusion la lunette ne vaudroit rien; mais il est aisé de voir aussi que la moindre erreur dans les dimensions pouvoit donner ici une aberration de 3 lignes; car, pour peu que les arcs concaves fussent plus grands, cette aberration deviendroit nulle, ou même négative. Or, comme on ne peut conclure la longueur des rayons des faces, que par la courbure des lentilles qui donne la longueur du sinus verse en lignes, une petite erreur d'un dixieme ou huitieme de ligne suffit pour changer tout le résultat. Les seules dimensions sûres sont celles du foyer & de l'ouverture. Soit la somme des sinus des quatre demi-courbures convexes,

$$\sin C + \sin C' + \sin C'' + \sin C''' = S,$$

celle des courbures concaves, $\sin K + \sin K' = \Sigma$, on a par la formule de la distance focale

$$F = \frac{\frac{1}{2}\omega}{(m-1)\,S - (n-1)\,\Sigma},$$

donc ici

$$(m-1)\,S = \frac{2}{51} + (n-1)\,\Sigma,$$

& comme, pour détruire la réfrangibilité, il faut prendre $dm : dn = \Sigma . S$, posant $dm = 1$, on a $S = dn\,\Sigma$, & par conséquent

$$\Sigma = \frac{2}{51 . [(m-1)\,dn - (n-1)]}.$$

Or, si l'on suppose avec Mrs. Dollond,

$$m - 1 = 0,53, \quad n - 1 = 0,583, \quad dn = 1,5,$$

on aura

$$\Sigma = \frac{1}{5,406} = 0,18498, \quad \text{donc } S = 0,27747;$$

&

& repartissant l'erreur proportionellement sur les six faces, on trouvera

sin. C	=	0.07563.	donc	C	=	4°. 20'.
sin. C'	=	0.05294.	- -	C'	=	3°. 2'.
sin. C'' = sin. C'''	=	0.07445.	- -	C'' = C'''	=	4°. 16'.
sin. K	=	0.10594.	- -	K	=	6°. 5'.
sin. K'	=	0.07904.	- -	K'	=	4°. 32'.

Ici la grandeur de l'arc K seroit déjà beaucoup plus que suffisante pour détruire l'aberration de longueur, & néanmoins la plus grande erreur dans les dimensions n'iroit qu'à 0, 2 lignes; & comme ces résultats varieront encore, selon qu'on déterminera les rapports m, n, dn, il est clair, ce me semble, qu'il n'est pas possible de découvrir avec la précision nécessaire l'aberration d'une lunette achromatique, par la simple mesure des lentilles de l'objectif, avec quelque exactitude que l'on en prenne les dimensions, si l'on ne connoit pas immédiatement la longueur du rayon des bassins, & les forces réfractives du verre que l'artiste a employé à cet objectif.

46. J'ai fait exécuter par le Sr. Ring un objectif à 3 verres isosceles, de $3\frac{1}{2}$ pieds de foyer, d'après les dimensions que j'ai données dans mon second Mémoire, Art. 44. Rem. 2. Tom. XIX. p. 55. L'aberration de longueur devoit, selon mon calcul, être sensiblement nulle pour les rayons d'un point dans l'axe; les verres convexes, quoique remplis de petites bulles, forment des images bien nettes. Mais la lentille concave de cristal d'Angleterre est remplie de veines, & de plus aucune de ces trois lentilles n'a exactement la courbure qu'elle devoit avoir; aussi la distance focale de cet objectif achromatique qui devoit être de 500 lignes, n'est que de 470 lignes. En remesurant les bassins, il s'est trouvé que le rayon de convexité avoit 314 lignes, au lieu de 312, & celui de concavité 250, au lieu de 241, ce qui en employant les rapports $m = 1,532$, $n = 1,581$, sur lesquels j'ai établi le calcul, donne exactement la distance focale observée. Il

eût été facile de remédier à cette erreur, en polissant d'autres lentilles sur les bassins rectifiés, mais jusqu'à présent il n'a pas été possible d'avoir de bon flintglaſs pour en faire un verre de trois pouces & demi d'ouverture. Quoi qu'il en soit, j'ai cherché de déterminer, à l'aide de cet objectif, la quantité de confusion de sphéricité tolérable dans une lunette dioptrique. Cette confusion, je parle toujours de celle qui ne résulte que de l'aberration réguliere d'un point de l'objet dans l'axe, auroit dû être nulle, si les lentilles avoient eu exactement la figure prescrite, parce que l'angle à l'axe des rayons extremes étoit de 0, 198 minutes plus petit que l'angle au foyer; ce qui donnoit une aberration négative, qui étoit exactement détruite par la flêche de la derniere courbure convexe; laquelle équivaut ici à un angle de 0, 199 minutes.

Mais les courbures des faces & la longueur du foyer commun n'étant plus les mêmes, il a fallu refaire le calcul; toujours en supposant l'ouverture égale à la douzieme partie du foyer. J'ai trouvé l'arc C convexe $= 3°. 34', 54$ & l'arc K concave $= 4°. 29', 644$, ce qui, par la simple formule $\Phi'' = (m - 1) 4C - (n - 1) 2K$, donne l'angle à l'axe des rayons qui passent à la circonférence $\Phi'' = 143, 215$ & par conséquent de $0', 058$ minutes trop grand. Mais cette aberration positive se réduit à rien, parce que les arcs concaves étant plus grands que les convexes de 54 minutes, le calcul exact par les sinus doit la diminuer de 3 à 4 secondes. En effet le calcul exact donne ici $\Phi'' = 143', 1591$, d'où soustrayant l'angle de mesure $A = 143, 1571$, il ne reste qu'un angle d'aberration positive de 0, 002 minutes, lequel sur une distance focale de 470 lignes ne produit qu'une aberration de 0, 0066 lignes; & par conséquent, si la derniere face de l'objectif étoit plane, les rayons extremes iroient tomber sensiblement au foyer; mais la fleche de la derniere courbure qui est le sinus verse d'un arc de $3°. 34', 54$ pour une demi-ouverture de $\frac{470}{24}$ lignes, fait tomber ces rayons à 0, 61127 lignes plus près de

l'ob-

l'objectif que n'eſt le foyer; en ſorte que l'aberration longitudinale & poſitive de cet objectif eſt en tout de 0.61784 lignes.

En adaptant à cet objectif un oculaire de 4 lignes, la confuſion dans l'œil, produite par l'ouverture entiere ſera donc

$$= \frac{0.61784}{4} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} = 0.0032179,$$

ce qui eſt le ſinus d'un angle d'environ 11 minutes, & par conſéquent intolérable.

Or, en obſervant la Lune & Jupiter avec trois de ſes ſatellites, j'ai trouvé que, pour un oculaire de 4 lignes, cet objectif ne ſouffre qu'une ouverture d'environ 20 lignes : juſques-là elle ne produit aucune confuſion ſenſible. En adoptant donc la regle que le diametre de la confuſion décroît en raiſon du cube des ouvertures, on a par l'analogie

$$39\tfrac{1}{6}^3 : 0.0032179 = 20^3 : 0.00042848,$$

ce qui eſt le ſinus d'un angle de 88 ſecondes.

Il ſemble donc qu'on en pourroit conclure que l'angle de confuſion tolérable dans les lunettes dioptriques eſt de 88 ſecondes, & par conſéquent la moitié plus petit que celui des téleſcopes, qui eſt de 172 ſecondes.

47. Mais cette concluſion pourroit bien n'être pas abſolument juſte, même abſtraction faite des autres ſources de confuſion phyſiques & géométriques, auxquelles tout objectif achromatique, & celui-ci en particulier, eſt aſſujetti. Il faut conſidérer que ma lunette, avec un oculaire de 4 lignes, groſſit 118 fois en diametre, & que pour une telle amplification les tables exigent une ouverture de 39 lignes dans les inſtrumens dioptriques, & de $33\frac{1}{3}$ lignes dans les téleſcopes à miroirs. Il eſt vrai que ma lunette avec une ouverture de 20 lignes, & même de 18, forme une image ſuffiſamment éclairée; il eſt néanmoins très probable qu'une plus grande clarté rendroit un égal degré de confuſion plus ſenſible, & qu'alors un angle de 88 ſecondes ne ſeroit plus tolérable.

 48. C'eſt

48. C'eſt en effet ce que l'expérience m'a fait voir dans les trois obſervations ſuivantes.

I. J'ai adapté à la lunette un oculaire de $6\frac{1}{2}$ lignes, & la plus grande ouverture ſans confuſion a été de 22 lignes.

II. Avec un oculaire de $9'''$, j'ai pu pouſſer l'ouverture à 23 lignes, & même à 24.

III. Avec un oculaire de 2 pouces, j'ai pu donner à l'objectif une ouverture de 30 lignes.

Or l'oculaire $6\frac{1}{2}$ lignes groſſit ici 72 fois, & ſelon les tables, cette amplification demande une ouverture de 23 à 24 lignes, de très peu plus grande que notre lunette ne l'admettoit. Ici donc la clarté eſt presque proportionnée au groſſiſſement. L'angle de confuſion pour l'ouverture $39\frac{1}{6}$ lignes ſeroit ici

$$= \frac{0.61784}{48.6,5} = 0.0019802 = 6'.45'';$$

donc, pour l'ouverture $22'''$, il eſt $= 0.00035096 = 72$ ſecondes; ainſi plus petit que le précédent dans la raiſon de 9 à 11.

L'oculaire $9'''$ produit une amplification $= 52$ qui, ſelon les tables, n'exige qu'une ouverture de $17\frac{1}{2}$ lignes: celle de la lunette étoit de 23 lignes; & par conſéquent la clarté ſurabondoit en raiſon de 9 à 7. Ici la confuſion qu'eût produit une ouverture de $39\frac{1}{6}$ lignes ſeroit $= \frac{0.61784}{48.9} = 0.0014302$, c. à d. de $4', 54''$; donc, pour une ouverture de 23 lignes, elle a dû être $= 0.00289628$; ce qui répond à un angle de $59\frac{1}{2}$ ſecondes, plus petit encore que le précédent dans la raiſon de 5 à 6.

Enfin l'oculaire 24 lignes produit un groſſiſſement d'environ 20 fois; auquel une ouverture de $6\frac{1}{2}$ lignes eût pû ſuffire; l'ouverture de notre objectif étoit 30 lignes, & par conſéquent la clarté ſurabondoit en raiſon de 9 à 2. La confuſion due à une ouverture de $39\frac{1}{6}$ lignes auroit

auroit été $= \frac{0.61784}{48.24} = 0.00053632 = 1'.50''$; donc, pour une ouverture de 30 lignes, le diametre apparent de la confusion est $= 0.000241$, ce qui répond à un angle de 50 secondes.

49. Il résulte de ces observations & de plusieurs autres que je ne rapporterai pas, que l'angle de confusion tolérable n'est pas constant, qu'il est plus grand quand l'image est moins éclairée, & qu'il devient plus petit à mesure que la clarté de l'image augmente; que, pour la clarté ordinaire des lunettes, on pourroit l'estimer à peu près à 70 secondes, si une observation individuelle pouvoit suffire à établir un calcul, si dans ce calcul toutes les données étoient bien précises, & si j'y avois tenu compte de l'épaisseur des lentilles & de la distance de leurs centres. Au reste, il ne paroit pas qu'il y ait aucune loi constante entre les degrés de lumiere & les degrés de confusion tolérables; s'il pouvoit y avoir une telle loi, celle qui s'accorderoit le mieux avec mes observations, seroit que les cercles de confusion augmentent en raison inverse sous-doublée des clartés linéaires, ou des diametres des ouvertures. Mais il est évident, ce me semble, que cette loi & toute autre auroit ses bornes; il doit y avoir un angle de confusion insensible à nos organes, quelle que soit la clarté d'un objet, & pareillement il y aura un angle de confusion tel qu'il sera perceptible aussi longtems que l'objet lui-même sera assez éclairé pour être apperçu.

50. Mr. d'Alembert estime que, dans les lunettes achromatiques, l'angle de confusion de sphéricité pourroit sans inconvénient excéder de beaucoup un angle de 3 à 4 minutes. En effet l'expérience des lunettes ordinaires montre que cet angle pourroit aller à 57 minutes, si la confusion de sphéricité n'étoit pas plus nuisible que celle des couleurs. Mais cette remarque seule suffit pour faire voir combien l'aberration de figure est plus nuisible que l'autre; car, si elle l'étoit moins, ou qu'elle ne le fût qu'à un degré égal, tout objectif achromatique à 3 lentilles devroit donner une lunette excellente, quelque proportion qu'il plût à l'artiste de donner aux faces, sans choix ni calcul;

puisque cet objectif ne pourroit jamais produire une confusion de sphéricité qui égalât celle des couleurs qu'on tolere dans les lunettes ordinaires; & rien n'empêcheroit de donner à cet objectif une ouverture beaucoup plus grande que celle de nos meilleures lunettes achromatiques.

51. J'avois adopté dans mon premier Mémoire Art. 29. Rem. 4. Tom. XVIII. p. 376. d'après les Opticiens, pour mesure de l'aberration insensible d'un objectif simple, une aberration longitudinale de 0.00375 pouces sur une distance focale de 50 pouces, mais en ajoutant que cette mesure ne pouvoit être constante qu'autant qu'on la rapporteroit à une amplification déterminée. Mr. d'Alembert observe très bien que l'aberration de sphéricité dans les lunettes ordinaires est beaucoup plus grande, & qu'elle est constante; mais c'est que par la construction de ces lunettes l'angle de confusion qui en résulte est pour l'ordinaire fort au dessous encore d'un angle de $3\frac{1}{2}$ secondes; il n'est que $\frac{1}{440.F}$, la distance focale F étant réduite en pouces (13). Ainsi, pour avoir $\frac{1}{440.F} = 0.00001697$ sinus de $3\frac{1}{2}$ secondes, il faut avoir $F = \frac{1}{0.0074659} = 134$ pouces $= 11$ pieds: toute lunette ordinaire, plus longue que onze pieds, aura un angle de confusion de sphéricité au dessous de $3\frac{1}{2}$ secondes; comme d'un autre côté cette lunette ne fût-elle que d'un pied, son angle de confusion de figure seroit à peine de 40 secondes; tandis que celui de couleur reste constamment de 57 minutes.

Si, dans les lunettes achromatiques, en donnant à l'ouverture une douzieme de la distance focale, on vouloit conserver le rapport ordinaire de 10 à 11 entre l'ouverture de l'objectif & le foyer de l'oculaire, la mesure adoptée pour l'aberration de longueur, savoir 0.000075.F, donneroit l'angle de confusion de sphéricité constamment

ment pour une lunette d'un foyer quelconque $= \frac{0.000075.F}{4} \times \frac{\omega}{F} \times \frac{1}{f} = \frac{0.00075}{44} = 0.00001704$, ce qui eſt le ſinus d'un angle de $3\frac{1}{2}$ ſecondes; & dans une telle conſtruction il eſt très probable que notre meſure d'aberration ſeroit trop petite. Mais, pour tirer un avantage réel des lunettes achromatiques, il faut proportionner leur effet à leur longueur, & alors la meſure de l'aberration longitudinale fixée à 0.000075.F, ſera plutot trop grande que trop petite, ſi le groſſiſſement eſt conſidérable. En effet, l'angle de confuſion dans l'œil ſera toujours $= \frac{0.000075}{4.12} \times \frac{F}{f} = 0.000001562$, multiplié par le groſſiſſement. Ainſi cette meſure d'aberration produira une confuſion de 32 ſecondes, ſi la lunette groſſit cent fois; de 48 ſecondes, ſi le groſſiſſement eſt 150; & de plus d'une minute, dès que l'amplification ira à 200 fois.

52. Il ſe pourroit, au reſte, que l'on pût tolérer dans ces lunettes une plus grande aberration longitudinale, ſi elle étoit la ſeule cauſe de la confuſion. En ſuppoſant, par exemple, que l'angle de confuſion tolérable puiſſe aller à 70 ſecondes, comme nous venons de le trouver; ſoit l'aberration abſolue de longueur que cette confuſion ſuppoſe $= a$ pouces, on aura avec un oculaire conſtant $= 0,28$ pouces, dans les lunettes achromatiques dont l'effet ſera proportionné à la longueur & dont l'ouverture ſera la douzieme partie de la diſtance focale: $\frac{a}{4} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{0.28} = \sin 70''$, ou $a = 0.00033937 \times 48 \times 0.28 = 0.00456$ pouces: telle ſeroit l'aberration abſolue tolérable dans les lunettes achromatiques d'une longueur quelconque. En comparant donc cette aberration à notre meſure, on aura $0''.00456 = 0''.000075F$, & $F = 60$ pouces. Ainſi la meſure de l'aberration inſenſible, adoptée par les Opticiens, ſeroit exacte dans une lunette achro-

achromatique de 5 pieds. On pourroit la prendre plus grande dans des lunettes plus courtes; mais il faudroit encore la diminuer dans les lunettes qui excéderoient cinq pieds en longueur. Quoi qu'il en soit, il sera toujours beaucoup mieux, ce me semble, de rendre l'aberration de longueur tout à fait nulle dès qu'on pourra le faire, puisque par là on diminue à proportion l'aberration des points hors de l'axe qui subsiste encore.

IV.

En rendant nulle l'aberration des rayons qui passent par la circonférence d'un objectif, reste-t-il une aberration sensible des rayons qui passent plus près du centre de cet objectif?

53. C'est à la sagacité de Mr. d'Alembert que je suis redevable de cette recherche. J'avoue que je ne m'étois pas douté que l'aberration pût être plus grande dans un anneau intermédiaire de l'objectif que dans l'anneau de sa circonférence; puisqu'on adopte communément que l'aberration augmente dans un même objectif comme le quarré de son ouverture; & qu'en effet dans une lentille simple biconvexe, les trois sources de l'aberration de figure que j'ai indiquées dans mon premier Mémoire, croissent avec l'ouverture, & décroissent avec elle; en concourant toutes à donner une aberration positive.

Mais, dans un objectif achromatique à trois lentilles, le cas est un peu différent. Les deux premieres causes de l'aberration agissent dans les trois verres; la troisieme cause n'a lieu que dans la derniere lentille. Elle opere nécessairement une aberration positive lorsque la derniere face est convexe. Les deux premieres causes donnent aussi une aberration positive dans les deux lentilles convexes, & une aberration négative dans le verre concave.

Lors donc que l'aberration est nulle à la circonférence, c'est que l'aberration négative du verre concave a compensé non seulement l'aberration positive analogue des deux lentilles convexes, mais encore l'aberration positive de la derniere courbure. Soit l'aberration due à la premiere cause, dans les lentilles convexes, $= a$, dans la concave, $= A$, l'aberra-

l'aberration due à la flèche de derniere courbure $= f$; on a lorsque l'aberration est nulle à la circonférence :

$$a + b + f - A - B = 0.$$

Or l'aberration b, B, dépend uniquement de la grandeur de l'ouverture ω, ou de la demi-ouverture x rapportée au foyer F constant, & lui est proportionnée, puisqu'on a $b = \sqrt{(FF + xx)} - F$.

La flèche f dépend de même uniquement de l'ouverture rapportée au rayon constant r de la derniere courbure, puisqu'on a $f = r - \sqrt{(rr - xx)}$.

Puis donc que l'aberration négative A + B équivaut & détruit l'aberration positive à la circonférence, il faut que la premiere source de l'aberration A, celle qui résulte du rapport variable des sinus aux arcs, contribue à ce surplus d'aberration négative, équivalent à $r - \sqrt{(rr - xx)}$. Mais, à mesure que l'ouverture diminue, ce rapport se rapproche de l'égalité, & par conséquent l'aberration qui en résultoit diminue aussi dans la même raison. Or le rapport de l'arc au sinus est comme $x + \frac{x^3}{6}$ à x, ou comme $1 + \frac{xx}{6}$ à 1. Ainsi l'aberration a, A, qui en résultoit, décroît comme le quarré de l'ouverture, tandis que les aberrations b, B, f, ne décroissent que comme l'ouverture elle-même.

Que la demi-ouverture, qui étoit x lorsque l'aberration étoit nulle, soit rétrécie jusqu'à être $\frac{x}{p}$, l'aberration de l'anneau correspondant à cette ouverture sera : $\frac{a}{pp} + \frac{b}{p} + \frac{f}{p} - \frac{A}{pp} - \frac{B}{p} = 0$, & puisqu'on a $\frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{f}{p} - \frac{A}{p} - \frac{B}{p} = 0$, l'aberration restante sera $a = \frac{(p - 1)(A - a)}{pp}$. Or il est visible

 qu'elle

qu'elle ne peut être nulle, qu'en ſuppoſant $p = 1$, ce qui indique l'anneau à la circonférence de l'objectif; ou en ſuppoſant $A = a$, ce qui indique le centre de l'objectif & revient à $p = \infty$: dans tous les anneaux intermédiaires il ſubſiſte donc une aberration de figure; & ce reſte d'aberration doit être poſitif puiſque $p > 1$, & que l'arc concave eſt toujours plus grand que l'arc convexe dans ce ſyſteme à 3 lentilles, où ces arcs ſont à peu près entr'eux comme 4 à 3.

54. Puiſque cette aberration reſtante α eſt nulle au centre & à la circonférence, elle doit néceſſairement avoir un *maximum*. Suppoſons en général $A - a = q$, on aura $\alpha = \frac{(p - 1)q}{pp}$; on a donc $d\alpha = \frac{-q dp}{pp} + \frac{2 q dp}{p^3}$; & par conſéquent l'aberration reſtante ſera la plus grande lorsqu'on prendra $p = 2$: elle tombe donc préciſément ſur l'anneau qui occupe la place moyenne entre le centre & la circonférence, & ſa grandeur abſolue eſt $= \frac{1}{4} q$.

55. Il ne ſeroit pas aiſé de déterminer analytiquement la valeur de q. C'eſt la différence entre l'angle ſous lequel le rayon qui paſſe par la circonférence du triple objectif va couper l'axe en ſe rompant ſelon la raiſon des ſinus, & l'angle ſous lequel il couperoit cet axe en ſe rompant ſelon la raiſon des arcs; il y a ici douze arcs de différentes grandeurs, dont chacun contribue diverſement à donner cette valeur de q. On peut néanmoins l'apprécier, quoique par une méthode peu exacte, en prenant ſimplement la différence des arcs de courbures à leurs ſinus. Ainſi, dans un objectif à trois lentilles iſoſceles, (Mém. de l'Acad. Tom. XIX. p. 54.) ayant le ſinus de la convexité $= 0.0667577$, la proportion des arcs donne l'arc $C = \frac{0.0667577}{0.0002909} = 229,9808$ minutes; les tables donnent cet arc $C = 3°. 50, 15792$: la différence eſt donc 0, 17284 minutes. Le ſinus de l'arc concave K eſt ici $= 0.0863974$, ce qui donneroit par la proportion des arcs

K =

$K = \frac{0.0863974}{0.0002909} = 297,909$ minutes. La table des ſinus donne $K = 4°. 58, 28347$. Ainſi la différence eſt $= 0', 3744$ minutes; on aura donc à peu près $-q = 4(m-1)\,0,17284 - 2(n-1)\,0,3774$, & ayant ici $m-1 = 0,531$, $n-1 = 0,582$, on trouve $q = +\,0,0672$ minutes, c. à d. que l'aberration négative A, due à la premiere cauſe, excede l'aberration poſitive a analogue, de 0, 0672 minutes.

Cette valeur de q eſt plutôt trop grande que trop petite, puisque, dans un objectif à 3 verres, l'angle à l'axe calculé par les arcs, n'excede que de 0,0285 minutes ce même angle calculé par les ſinus (Mém. de l'Ac. Tom. XVIII. p. 358. & 390.). Il eſt vrai que là les arcs ſont un peu plus petits qu'ici, & que l'excès de K ſur C n'eſt que 52 minutes, au lieu qu'il eſt ici 66'.

56. En prenant donc l'angle $q = 0', 0672$, on trouvera que ſur un foyer de 500 lignes la plus grande aberration reſtante $= \frac{1}{4}q$, ſera $= 0,059$ lignes, ou en général $= 0.000117.F$; ce qui ſeroit à la meſure de l'aberration inſenſible en raiſon de 3 à 2.

57. Si ce reſte d'aberration qui n'eſt tel que dans l'anneau mitoyen, & qui décroît ſucceſſivement des deux côtés dans tous les autres, étoit aſſez conſidérable pour mériter qu'on y fît attention, il ne ſeroit néanmoins pas expédient de le détruire entierement; car pour le faire il faudroit poſer $\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{f}{2} - \frac{A}{4} - \frac{B}{2} = 0$, pour l'ouverture $\frac{1}{2}x$. Mais alors on auroit pour l'ouverture quelconque $\frac{x}{p}$ un reſte d'aberration $a = \frac{(\frac{1}{2}p - 1)q}{pp}$.

 Lors-

Lorsque cette aberration est positive, on a $d\alpha = \frac{2q\,dp}{p^3} - \frac{q\,dp}{2pp}$, & par conséquent le *maximum* donne $p = 4$, ou $\alpha = \frac{1}{16}q$, pour l'anneau qui seroit trois fois plus près du centre de l'objectif que de la circonférence.

Mais, lorsque cette aberration est négative, c. à d. que $\frac{1}{2}p < 1$, elle n'a de *maximum* que lorsque $p = 0$. Elle croît avec l'ouverture; ainsi à la circonférence, où l'on a $p = 1$, ce reste d'aberration seroit $\alpha = -\frac{1}{8}q$; & par conséquent double de celle qu'on auroit voulu détruire.

58. Il est évident, & par la solution précédente, & par la nature du sujet, que si l'aberration de figure est nulle dans un anneau intermédiaire, elle sera négative & toujours croissante de là vers la circonférence; qu'au contraire de cet anneau vers le centre elle sera positive, & qu'elle aura un *maximum*. Pour avoir donc sur tout l'objectif la moindre aberration possible, il faut que ce *maximum* positif égale l'aberration négative à la circonférence: soit pour cet effet l'aberration nulle dans l'anneau qui répond à $\frac{x}{p}$, & la plus grande aberration positive restante dans l'anneau dont le rayon est $\frac{x}{\pi}$, on aura

$$\frac{a}{pp} + \frac{b}{p} + \frac{f}{p} - \frac{A}{pp} - \frac{B}{p} = 0;$$

donc en $\frac{x}{\pi}$ l'aberration restante positive sera $\alpha = \frac{(\pi - p)q}{p\pi\pi}$, & puisque ce doit être la plus grande, on a, en posant p constant, $\frac{2q\,d\pi}{\pi^3} - \frac{q\,d\pi}{p\pi\pi} = 0$, ou $\pi = 2p$, donc $\alpha = \frac{q}{4pp}$.

Mais

Mais à la circonférence en $\frac{x}{1}$, on aura l'aberration négative restante: $-\alpha = \frac{(p-1)q}{p}$, ce qui donne l'équation $\frac{(p-1)q}{p} = \frac{q}{4pp}$, d'où l'on tire $p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$, & puisque p doit être positif, on aura sa valeur $p = 1,2071$. Ainsi, pour qu'un objectif achromatique eût sur toute sa surface la moindre aberration de figure possible, il faudroit rendre cette aberration nulle pour l'anneau qui répond au demi-diametre $\frac{x}{1,207}$. Mais alors la plus grande aberration restante seroit encore en deux endroits $\alpha = \frac{0.207}{1.207} q = 0.1716q$. Or, en rendant l'aberration nulle à la circonférence même, le plus grand reste d'aberration étoit $\frac{1}{4}q = 0,25q$. Tout ce qu'on gagneroit donc à ne pas détruire l'aberration précisément à la circonférence seroit de la diminuer de $0.078q$, c. à d. de 0,018 lignes sur un foyer de 500, ou en général, d'une trente millieme partie de la distance focale; ce qui n'est pas la moitié de l'aberration estimée insensible.

59. Il résulte de cette recherche que, de quelque façon qu'on s'y prenne, il y aura toujours dans un objectif achromatique un petit reste d'aberration de sphéricité, même pour les rayons d'un point dans l'axe; & que, pour rendre cette aberration insensible, ce qu'on peut faire de mieux est de la détruire à la circonférence même, ou à l'anneau qui seroit d'une sixieme partie plus près du centre de l'objectif que celui qui passe par la circonférence; cela veut dire que les dimensions trouvées pour un objectif achromatique dont l'ouverture sera $\omega = \frac{F}{12}$, seront encore meilleures pour une ouverture $\omega = \frac{F}{10,3}$.

V.

Sur l'erreur que l'épaisseur des verres peut produire dans le calcul de l'aberration.

60. Mr. d'Alembert fait encore ici une observation très juste, c'est qu'en ayant égard à l'épaisseur des verres l'angle Φ'', sous lequel le rayon extreme va couper l'axe, devient plus petit que le calcul ne le donne lorsqu'on néglige cette épaisseur. Si donc l'angle de mesure A restoit constant, comme Mr. d'Alembert le suppose, il est certain que l'aberration trouvée en négligeant l'épaisseur des lentilles seroit moindre que le calcul ne la donne, lorsqu'elle est positive, & que cette aberration seroit plus grande dans le cas opposé.

Mais il faut considérer que l'angle de mesure A n'est censé constant qu'autant que la demi-ouverture x' de la derniere face de l'objectif est censée être la même que la demi-ouverture x de la premiere face. Cette égalité d'ouverture doit avoir lieu aussi longtems que l'on suppose nulles l'épaisseur des verres & leur distance. Dès que cette supposition n'a plus lieu, ce n'est que sur l'ouverture de la derniere face que se détermine l'angle de mesure A, puisque sa tangente est toujours $= \frac{x'}{F}$. J'avois déjà fait cette remarque dans mon premier Mémoire Tom. XVIII. p. 355. & j'en avois conclu qu'une diminution devoit sensiblement compenser l'autre; parce qu'en effet si l'on nomme e l'épaisseur d'une lentille, & Φ l'angle à l'axe après la premiere réfraction, la diminution que l'épaisseur produit sur l'angle Φ'' calculé en négligeant l'épaisseur, sera $= -\frac{(m-1)e \sin\Phi}{r}$, & la même diminution sur l'angle de mesure A sera $= -\frac{e \sin\Phi}{F}$; or, puisqu'on a à peu près $m - 1 = \frac{1}{2}$, & que dans les objectifs à

à 3 verres isosceles on a aussi assez sensiblement $F = 2r$, on peut prendre sans erreur $\frac{e \sin \Phi}{F} = \frac{(m - 1) e \sin \Phi}{r}$.

Néanmoins, comme il y a dans ces objectifs trois lentilles, que l'épaisseur du verre concave est beaucoup plus grande à la circonférence que celle des lentilles convexes, & qu'en général l'épaisseur d'un objectif achromatique est bien plus considérable rélativement à la distance focale, que ne l'est l'épaisseur d'un objectif simple dans les lunettes ordinaires; il paroit qu'on ne sauroit se dispenser de tenir compte de cette épaisseur & de la distance des verres dans les lunettes achromatiques, si l'on veut rendre l'aberration longitudinale, ou entierement nulle, ou du moins s'assurer qu'elle est plus petite que $\frac{F}{13333}$. Et cela étant, il est clair, ce me semble, que la méthode que j'ai proposée est la seule qui puisse être employée dans la pratique, tant pour la facilité & la verification des calculs, que pour atteindre à la précision nécessaire, & pour pouvoir l'appliquer également à toutes les especes de verres. La méthode analytique a sans contredit un avantage bien décidé dans la théorie, en ce qu'elle peut embrasser la question dans toute sa généralité; mais, si l'on veut que les lunettes achromatiques produisent un grand effet sans devenir incommodes par leur longueur, elles doivent porter une grande ouverture, & dès lors, comme Mr. d'Alembert l'observe très bien, il sera indispensable de tenir compte des puissances supérieures au quarré de l'ouverture, & de faire entrer dans le calcul l'épaisseur, & peut-être même la distance des verres. Or en ce cas là il est bien sûr que la formule analytique de l'aberration d'un objectif à trois lentilles deviendra si excessivement longue & compliquée, que personne n'aura la patience d'y appliquer le calcul numérique, & qu'en l'entreprenant même, on ne seroit jamais bien assuré de la justesse du résultat; les méprises étant presque inévitables dans des calculs de cette longueur.

Au

Au lieu que, dans la méthode que je propose aux artistes; savoir de suivre le rayon dans sa traversée, l'épaisseur & la distance des verres n'augmente presque point la difficulté du calcul. L'opération reste la même; il n'y a toujours pour trois lentilles que douze angles à calculer, qui se vérifient sans peine quatre à quatre par la simple formule $\Phi = (m - 1)(C + C')$, ou $\Phi = (n - 1)(K + K')$. Ces angles déterminent d'eux-mêmes, sur l'épaisseur ou la distance donnée, les ouvertures des faces correspondantes, la premiere ouverture étant prise $= \frac{1}{12}. F$. Il est vrai que pour connoître les épaisseurs des lentilles, il faudra fixer d'avance la longueur de la lunette dont on veut calculer l'objectif. Mais, si dans la méthode analytique on vouloit trouver une solution générale, il faudroit supposer les coëfficiens des termes qui renferment les puissances des x, x', x'', &c. des e, ϵ, e', & des $\delta, \delta' = 0$, ce qu'il ne feroit gueres possible de faire sans négliger tout au moins la valeur d'une treize-millieme partie de la distance focale; & par conséquent sans rendre la solution défectueuse. Les difficultés qu'il y a d'atteindre, & dans le calcul, & dans l'exécution, le degré de précision nécessaire, demanderoient des recherches d'un nouveau genre pour suppléer à cet inconvénient. Mais ce que j'aurois à proposer à ce sujet ne sauroit entrer dans ce Mémoire, qui n'est déjà que trop long.



COR-

CORRECTION
CARACTÉRISTIQUE SUCCINTE
DU GENRE
DE L'*ALBUCA* ET DE L'*ALETHRIS* DE *LINNÉ*.

PAR MR. GLEDITSCH.

Traduit du Latin.

Tandis que j'étois occupé à rédiger l'hiſtoire naturelle de l'arbre qui porte le nom de *Draco Cluſii*, qui, contre toute attente & opinion, a produit des fleurs pendant les mois d'été de cette année, dans le Jardin Botanique Royal de Berlin; une couple de plantes du Cap, des plus rares & des moins connues, me ſont tombées pour la troiſieme fois, ſous la main, non ſeulement avec leurs fleurs, mais même avec des fruits déjà noués. La premiere étoit la petite *Albuca*, & l'autre l'*Alethris* du Cap, de *Linné*. Dans les années précédentes, j'avois déjà quelquefois examiné une autre eſpece de cette derniere, que le célebre *Linné*, dans ſes *Spec. Plant.* 2. appelle *Alethris hyacinthoïdes*. Comme il y a eu juſqu'ici diverſes incertitudes & obſcurités répandues dans la définition des genres de ces plantes, & que les plus habiles Botaniſtes n'ont pu encore la mettre dans un jour ſuffiſant, j'ai cru qu'elles méritoient de nouvelles recherches par rapport à leur caractere générique.

Et d'abord, pour ce qui concerne le genre de l'*Albuca*, j'ai ſuffiſamment compris par les Ecrits de Mr. *de Linné*, qu'il conſiſte en deux eſpeces, qui ont l'une & l'autre leur ſol natal en Afrique, & que, ſuivant le génie du ſiecle paſſé, on n'en a encore donné que des

des descriptions plus ou moins obscures & superficielles, en les rapportant d'abord au genre de l'*Ornithogale*, d'où finalement on les a fait passer à celui de l'*Albuca*. La premiere espece de l'*Albuca*, que Mr. *de Linné* nomme *la grande*, fut communiquée aux amateurs de la Botanique par *Jaques Cornu* & *Robert Morison*; & l'autre, ou la petite, fut insérée pour la premiere fois dans le *Paradisus Batavus* du célébre *Paul Hermann*. Mais, comme le genre de l'*Albuca*, suivant le caractere qu'en fournit Mr. *de Linné*, differe manifestement de tous les autres de l'ordre liliacé entier; de même aussi, les especes qui ont été indiquées ci-dessus, ne s'accordent pas tout à fait par rapport à la structure des fleurs, en sorte qu'on pourroit être en doute, si elles doivent être comprises sous un seul & même genre naturel, ou non?

Cependant, ces plantes que nous avons dit avoir été prises pour des *Ornithogales* par *Cornu*, *Morison* & *Hermann*, se sont rencontrées rarement dans nos Jardins, & n'existoient pas partout, depuis le tems de ces Botanistes; ou du moins, la connoissance en a été négligée, comme celle de tant d'autres du même ordre, de façon qu'elles ont péri sans qu'on ait pensé à s'assurer de leur véritable caractere. Mais les Botanistes modernes, qui sont plus attentifs à observer les caracteres naturels des plantes qu'occupés à construire de nouveaux systemes, n'ont pas eu occasion d'examiner ces plantes vivantes, ou n'en ont vû tout au plus qu'une ou deux: ce qui ne leur a pas permis d'en comparer les fleurs. Nous avons à cet égard un témoignage du plus grand poids, c'est celui de l'illustre *Linné*, qui, autant qu'il lui a été possible, a soumis à une observation exacte toutes les fleurs fraîches qu'il a pu se procurer; mais, celles du genre en question lui ayant manqué, il en a non seulement considéré souvent les fleurs seches, mais, au défaut des plantes mêmes, il a eu recours aux descriptions les mieux faites qui se trouvent dans les Auteurs; ou se confiant à des figures bien dessinées, il a dressé les caracteres des genres avec un succès inégal. Il est assez manifeste que les choses se sont passées de cette maniere à l'égard du genre de l'*Albuca* & de celui de l'*Alethris*. Qu'il me soit permis d'assurer à cette occasion, que Mr. *Cranz*, Pro-

fesseur

fesseur en Médecine qui a beaucoup de réputation à Vienne, dans ses *Institutiones Regni vegetabilis*, Ouvrage travaillé avec beaucoup de soin, a pareillement fait mention du genre de l'*Albuca*, quoiqu'il n'eût vu ni l'une ni l'autre des especes de ce genre vivante, & en fleur: ce dont on peut aisément s'assurer, pour peu qu'on soit versé dans la Botanique, en comparant les caracteres qu'il établit avec les descriptions & la figure qu'on trouve dans *Morison*. En effet, les signes qui expriment le caractere essentiel du genre, existent déjà en partie dans les Ecrits de *Morison* & de *Linné*, en partie dans les nôtres. Quant à moi, des deux plantes vivantes que Mr. *de Linné* a rapportées à l'*Albuca*, je n'en ai pu examiner qu'une, savoir celle que cet illustre Auteur appelle *la petite*, ou *foliis subulatis*, qu'on m'avoit donnée seche & assez négligemment recueillie, il y a plus de trente ans, sous le faux nom d'*Aloé oriental*, ou de *Hastula regia vera*. J'ai donc autrefois pris pour un *Ornithogale*, sur la foi des auteurs, la premiere espece d'*Albuca* que Mr. *de Linné* désigne par le nom trivial *de grande*, & que je n'avois pas encore vue; ensuite je l'ai rangée en hésitant dans le genre de l'*Albuca;* & aujourd'hui, à dire le vrai, à cause de quelque différence dans le caractere proposé par Mr. *de Linné*, quand on l'applique à l'autre espece, je n'ai pu encore réussir à réunir ces deux plantes, sans apporter du changement au caractere nécessaire.

En attendant, les plantes en question, par la valeur de leur caractere naturel, ne sauroient entrer dans le genre de l'*Ornithogale;* & les figures aussi bien que les descriptions qu'en ont données différens Auteurs, ne sont propres qu'à nous jetter tout à fait dans l'erreur, si nous ne sommes pas à portée d'examiner les fleurs sur les plantes vivantes. Car, comme le caractere le confirme, la structure des fleurs de notre plante ne s'accorde pas bien avec ce qu'en dit Mr. *de Linné*. En effet, cette espece dont il fait la premiere de l'*Albuca*, & qui est appellée *Ornithogallum luteo-virens Indicum*, dans *Cornuti Canad.* 160. fig. 161. differe assez considérablement, quant à la structure des fleurs, de l'autre, qui est la nôtre, & à laquelle *Hermann* a donné le nom

 d'*Or*-

d'*Ornithogallum africanum*, *flore viridi*, *altero alteri innato*, Parad. Batav. 209. Tab. 209.

Mais, pour parvenir à une plus grande certitude sur la différence qui se trouve entre les fleurs de la plante susdite, & faire voir en même tems la nécessité de corriger le caractere générique de l'*Albuca*, rapportons la description très exacte de la fructification de l'*Albuca* (la grande) *foliis lanceolatis*, Linn. Sp. P. 2. 438. qui est la véritable plante de *Cornu*, de *Morison*, de *Ray* & de *Rudbeck*. Cette description a été faite avec le plus grand soin par Mr. *Pierre Jonas Bergius*, de Stockholm, Professeur très célebre, & l'un des plus habiles Botanistes de nos jours. Il l'a insérée dans sa *Description* (en Latin) *des Plantes du Cap de Bonne-Espérance*, p. 87. 88, & nous y joindrons notre caractere qu'a fourni l'*Albuca* (la petite) *foliis subulatis*, Linn. Sp. Pl. 2. 439.

Voici d'abord le détail de la fructification de l'*Albuca* d'après les observations de Mr. *Bergius*.

CALIX. O.

COROLLA. *Petala* sex linearia, longitudinaliter nervosa, marcescentia; *tria exteriora* patula, latiora, concaviuscula, rubra, apice obtuso, squamula parva marginali inflexa: *tria interiora* angustiora, erecta, convergentia, dilute rubra, margine lato tenui membranaceo albido utrinque aucta; apice instructa, squama membranacea inflexa.

STAMINA. *Filamenta* sex erecta, longitudine corollæ, linearia, membranacea, albida, infima basi concreta, receptaculo inserta, quorum tria altera libera, tria vero alterna reliqua, basi latiore, interioribus petalis inferne adnata. *Antheræ* incumbenti-erectæ, quarum tres alternæ steriles emarcidæ, in filamentis liberis, tres vero reliquæ albidæ, polline luteo, lineares, utrinque obtusæ, emarginatæ subincurvæ, dorso convexæ, antice plane concavæ, didymo-sulcatæ.

PISTILLUM. Germen carnosum, pyramidali-cylindricum obtusum, rubro-kermesinum, glabrum, apice tricallosum, basi subpedunculatum, desinens in dentes plures, adpressos, obtusos, parvos. *Stylus* crassissimus triqueter, compressiusculus, angulis duobus prioribus,

basi

basi paululum attenuatus, pubescens, germine brevior. *Stigma* compresso-pyramidale obtusum, luteo-rubrum, margine pubescens.

PERICARPIUM. *Capsula* ovalis, obtusa, glabra, transversaliter nervosa, compressa, dorso bi-marginata, trilocularis, trivalvis.

SEMINA plura, orbiculata, plana.

Nous allons présentement donner le caractere naturel de notre petite plante

ALBUCA.

CALYX. O.

COROLLA monopetala campanulata, ultra medium sexfida, æqualis, hypocarpia persistens: *laciniis* oblongis, lineari-lanceolatis, marginatis, integerrimis, in apice carnosis: *tribus exterioribus* paulo latioribus, brevioribus patentibus, apice reflexis: *tribus interioribus* rectioribus, apice planiusculo patente donatis, & collo nonnihil coarctatis: lateribus autem membranaceis in tubum conicum melliferum coalitis in partes canaliculatas plus minus dehiscentem.

STAMINA. Sex subulata, æqualia, corolla breviora, superne erecta, inferne membranacea latiora, compressa & ad tubi figuram incurva, laciniis tribus interioribus per paria opposita, & secundum longitudinem adnata. *Antheræ* in collo tubi contractiore lineares, obtusiusculæ, emarginatæ, erecto-incumbentes & nonnihil conniventes.

PISTILLUM. *Germen* oblongum, pedicellatum, trisulcatum, trilobum & obtuse triquetrum. *Stylus* crassus, inferne levissime trisulcatus, superne teretiusculus, staminibus brevior: *Stigma* obtusum papillis setaceis tectum, quorum tres distinctæ prominulæ.

PERICARPIUM. *Capsula* basi cylindraceæ brevi incidens, oblonga, obtusa, triangularis, trilocularis, trivalvis.

SEMINA numerosa, plana, ovato-acuminata, in singulo loculo duplice ordine incumbentia & columellæ affixa.

Par tout ce qu'on vient de lire, il paroit que la description de Mr. *Bergius* a beaucoup de conformité avec notre caractere à divers égards; mais la différence est totale tant par rapport à la corolle qu'aux filamens.

Notre petite plante, dont nous avons tracé succintement le caractere, vit en Afrique, autour du Cap de Bonne-Espérance, dans des lieux bas, dont le sol est spongieux, tempéré & tirant à l'humide; c'est surtout en hyver qu'elle fleurit, au lieu que, dans nos Jardins, c'est au printems & en automne. Quant à sa constitution, elle est tendre, molle & droite; sa racine est fibreuse; elle a un petit nombre de feuilles charnues, de la forme dite *subulato-canaliculata;* la tige est simple, déliée & arrondie, assez nue & garnie seulement vers la pointe de quelque peu de fleurs, petites & éparses, qui, à cause de la foiblesse des péduncules, se portent du même côté & se courbent vers le bas; mais, après l'efflorescence, les péduncules se redressent. La spathule simple a la forme dite *ovato-subulata;* elle est petite, concave, permanente & revêt la base de chaque pétiole.

La corolle de notre petite plante n'est pas hexapétale, mais elle est vraiment monopétale, suivant le caractere marqué ci-dessus; ses trois découpures intérieures n'ont point de connivence, mais elles sont cohérentes entr'elles par des bords membraneux, & les pointes réniformes des pétales ne sont point échancrées.

De plus, il n'y a aucun *nectaire* à observer, qui soit distinct de la corolle pétaloïde, ou redressé sous la forme de deux pointes, sortant de sillons plus dilatés dans la base du germe; c'est plutôt ce tuyau qui naît de la coalescence du bord des trois pétales intérieurs, auquel conviennent les fonctions du nectaire; mais c'est ce que les experts dans l'art ne sauroient suffisamment inférer de la figure grossiere & incomplette de l'espece de Morison.

J'ai trouvé tous les *filamens* d'une seule & même longueur; toutes les *antheres* ont aussi la même grandeur & épaisseur; la fertilité leur est commune à toutes, & elles lancent par éjaculation une poussiere farineuse sur un *stigma* humide; il n'y a point d'autres antheres plus longues, ou stériles, qui alternent par leur situation, quoique *Morison* aussi bien que Mrs. *de Linné* & *Bergius* en fassent mention. Je n'oserois pourtant affirmer, si quelque état non-naturel, le trop de seve,

ou

ou des maladies peuvent causer quelquefois dans les filamens les changemens indiqués par les Auteurs, ou non?

La structure de la corolle monopétale continue est singuliere, à cause des trois découpures intérieures qui se réunissent par en bas en un tube qui donne du miel, & dans la cavité duquel les filamens prennent naissance & sont opposés à chaque découpure par paires: ce qui forme un genre distinct dans l'ordre des plantes liliacées. M. *de Linné*, en voulant marquer la différence d'espece de sa premiere *Albuca*, qu'alors il n'avoit pas encore vue vivante, s'exprime d'une maniere un peu obscure & incertaine, à la p. 235. de l'Ouvrage intitulé *Hortus Cliffortianus*; & dans l'observation qui concerne le genre du *Galanthe*, il met en question:

„Si l'on doit prendre pour une espece de ce genre, (du *Galan-*
„*the*,) l'*Ornithogallum luteo-virens*, *Indicum*, *Cornuti*?

Je serois porté à le croire, dit-il, *si les trois pistilles n'étoient pas ombragés.*

Mais, ayant acquis depuis des notions plus certaines, il a construit le genre de l'*Albuca*, lequel cependant, à cause qu'il n'a pas été à portée d'examiner les plantes vivantes, a incontestablement besoin d'être encore revu & corrigé. Quant à ce qui concerne cette prétendue ressemblance extérieure, que quelques uns ont voulu trouver entre les corolles du *Galanthe* & celles de l'*Albuca*, l'inspection même des fleurs démontre manifestement qu'elle est très petite, ou même qu'elle se réduit à rien. A quoi je pourrois ajouter la situation da la corolle au dessus du fruit dans le *Galanthe*, au lieu que le fruit, ou le germe qui lui sert de rudiment dans l'*Albuca*, est contenu au dedans de la corolle; pour ne pas répéter ce que j'ai déjà dit plus d'une fois de l'insertion & de la situation des étamines dans les fleurs de l'*Albuca*.

Mais il y a une autre ressemblance de toute la plante, qui semble avoir rappellé de l'antiquité le nom générique de l'*Albuca*, qui étoit

étoit tombé dans l'obſcurité & qu'on avoit négligé. Ce nom, chez les Grecs & les Latins, dénote l'*Aſphodele*, que d'autres ont auſſi appellée *Anthericum*. C'eſt peut-être l'eſpece d'affinité qui ſe trouve entre l'*Aſphodele* & l'*Anthericum* dans l'ordre liliacé, par où Mr. *de Linné* a été conduit à donner à ſon nouveau genre le nom d'*Albuca*. Dans les Ecrits des Anciens, l'*Albuca* & l'*Albucium* ne different pas beaucoup de l'*Antherica* & de l'*Anthericum*, par rapport à la ſignification; & tantôt ils déſignent l'*Aſphodele* tout entier, qu'on nommoit autrement *Haſtula regia*, on *heroin;* tantôt on n'entend par là que la tige de l'Aſphodele chargée de fleurs, ou ſes fruits, ou ſeulement ſes ſemences. Si l'on s'en rapporte à quelques anciens Commentateurs, l'*Antherix*, l'*Antherice*, & l'*Anthericum* ſignifient la tige de l'*Aſphodele*, ou ſuivant d'autres, ſon épi en fleur: c'eſt le ſentiment de *Théophraſte*, Lib. I. de Plant. Cap. VII. auquel *Heſychius* ſe range: & l'on peut y joindre les autorités de *Suidas*, d'*Hérodote*, de *Dioſcoride* & de *Pline*, qui ſont pourtant contredites par *Apollodorus Dorienſis*. La racine tubereuſe en forme de navet de l'Aſphodele, qui entroit autrefois parmi les mets des Grecs comme l'*Aſperge* & l'*Halimus*, s'appelloit *Albucum;* & de la racine ſeule venoit le nom d'*Albucium*, donné à toute la plante.

Pour ſuivre l'ordre que je m'étois preſcrit, je paſſe préſentement à la correction caractériſtique de l'autre genre de plantes, que Mr. *de Linné* appelle *Aletris*, dans ſes *Gen. Plant.* ed. 6. p. 165. genre dont j'ai déjà fait mention ci-deſſus. C'eſt ce célebre Botaniſte même qui eſt l'auteur de ce genre; & il en rapporte quatre eſpeces dans ſes *Sp. Pl.* 2. 456. Je n'ai pas encore vû vivante la premiere eſpece à laquelle il a donné le nom trivial de *farineuſe*, non plus que la quatrieme qu'il a appellée *fragrantem*. Mais, pour la ſeconde, qui tire ordinairement ſa dénomination du Cap, elle a fleuri chez nous en 1765 & 1767; & la troiſieme (*hyacinthoïdes*,) a prévenu de beaucoup la ſeconde par rapport au tems de l'effloreſcence, & nous lui avons vû porter des fleurs pendant trois ans.

Cette

Cette plante vivace, qui eſt commune dans nos jardins, quoiqu'elle y fleuriſſe aſſez rarement, ſe trouve décrite & peinte par le célebre *Trew*, dans le *Commercium Noricum*, auſſi bien que par d'autres Auteurs. Voici ſes caracteres en termes de l'art.

Radice gaudet tuberoſo-geniculata perenni, radicum Iridis quodammodo æmula, rotundiori tamen. Folia ejusdem radicalia ſunt magna, lanceolata, carnoſa, denſa, tenacia atque perennia, & quidem in varietate Grinenſi, coloribus ex atro & viridi undulatim variegata, in altera varietate autem longiſſima, ſubulata atque compreſſa. Caulis eſt nudus herbaceus, annuus, inferne rotundus, ſuperne nonnihil ſulcatus, totusque obſcure maculatus, ſpathis ſparſis vulgò veſtitus, floribus autem in panniculum laxe diſpoſitis. Singuli flores propriis pediculis inſidentes, modo ſolitari aut binati, modo ternati, ſpathulis propriis ovato-acuminatis, carinatis, in baſi a ſe invicem diſtinguuntur.

Cette plante en fleur, qu'on trouve déſignée dans les *Sp. Pl.* 2. 456. en ces termes, ALETHRIS 3. *hyacinthoïdes acaulis*, *foliis lanceolatis*, *carnoſis*, *floribus geminatis*, Linn. fournit le caractere ſuivant.

ALETHRIS.

CALYX. O.

COROLLA monopetala, tubuloſa, erecta, ſemi-ſexfida, hypocarpia, marceſcens: *Tubo* inflexo, in baſi nonnihil ventricoſo; *Limbo* patente, *laciniis* lanceolatis, acuminatis, æqualibus, revolutis, canaliculatis, in apice excavatis; & in formam ringentem fere diſpoſitis.

STAMINA. *Filamenta* ſex, ſubulata, æqualia, limbo corollæ breviora, laciniisque oppoſita, quarum baſi (non tubo) inſerta ſunt. *Antheræ* oblongæ, incumbentes.

PISTILLUM. *Germen* ovato-oblongum, in fundo corollæ; *Stylus* ſubulatus, rectus, corolla longior; *Stigma* minimum, capitatum, obtuſum, tridentatum.

PERICARPIUM. Capſula ovato-oblonga, trilocularis.

SEMINA ſolitaria, globoſa, in ſingulo loculo.

La

La ſeconde eſpece eſt dite par Mr. *de Linné*, Sp. Pl. 2. p. 456. ALETHRIS (Capenſis) *acaulis, foliis lanceolatis, undulatis, ſpica ovata, floribus nutantibus.*

On en trouve une deſcription plus étendue à la p. 10. du *Prodrom. in Joh. Burmanni Flor. Capenſ.*

Cette plante qui eſt de la plus grande beauté, a fleuri avec la *Ferraria Linnæi*, en 1766 & 1768, au Jardin Botanique Royal, & dans le Verger de l'Ecole réelle. Les Jardiniers lui donnent le nom de *Brunſwigia*, & les Etudians en Botanique ne pouvant s'accorder à ſon ſujet; ont eu recours à mes conſeils. Je vais donc en placer ici la deſcription, & conſerver les termes de l'art.

> *Planta* nondum florens, bulboſa, humilis, Capenſis illa, primo HÆMANTHI *punicei.* Linn. Sp. Pl. 413. facie, ſcapo ſuo florente, multum deinde accedit forma externa ad ALOEN (8. uvariam) *floribus ſeſſilibus, reflexis, imbricatis, priſmaticis.* Linn. Sp. Plant. 2. 460.
>
> *Radix* eſt bulboſa, globoſa, tunicata, perennis, fuſci coloris. *Folia* radicalia ſeſſilia, ovato-lanceolata, undulata, obtuſa, ſtriata, verſus baſin anguſtiora.
>
> *Caulis* eſt *ſcapus* ſimplex, teres, nudus, e foliorum interſtitiis duorum pedum altitudine aſſurgens, pollicisque craſſitie, in apice angulatus, ſpicam florum formans ovatam oblongam, nutantem, bracteisque imbricatis diſtinctam; corollis breviſſime petiolatis. Circa ſinguli petioli baſin *bractea* duplex, utraque perſiſtens naſcitur, quarum exterior major, cordato-oblonga, interior altera ſubulata & minor eſt.

Nous allons indiquer les circonſtances les plus remarquables qui concernent le caractere de la fleur; parmi lesquels il y en a qu'on peut conſidérer comme eſſentielles, & qui diſtinguent tout à fait notre plante non ſeulement de l'*Alethris*, mais auſſi de l'*Aloé*, de l'*Hyacinthe*, du *Polyanthe*, & des autres genres de l'ordre liliacé.

> CALYX. O.
>
> COROLLA monopetala, tubuloſa, oblonga, hypocarpia, marceſcens. *Tubus* nonnihil angulatus, baſin verſus incurvus. *Limbus* erectus, breviſſimus, ſexfidus, patens, laciniis ovato-obtuſis, in apice craſſiuſculis.

STAMINA.

STAMINA. *Filamenta* ſex, ſubulata, verſùs latus inferius inflexa, tubo corollæ paulo breviora, eodemque tubo infra mediam ſui partem ſecundum longitudinem adnata, & in fundum decurrentia. *Antheræ* incumbentes oblongæ didymæ.

PISTILLUM. *Germen* oblongum, trigonum, triſulcum. *Stylus* ſubulatus, ſtriatus, ſitu & flexura ſtaminum, iisque brevior. *Stigma* obtuſum.

PERICARPIUM. *Capſula* tumida, ovato-oblonga, ſuperiùs attenuata, tribus alis notata, trilocularis, trivalvis, apice dehiſcens.

SEMINA in ſingulo loculo ſolitaria, obovata, arillata, receptaculo columnari affixa.

En vertu du caractere qui ſe manifeſte évidemment dans les fleurs fraîches, la ſeconde eſpece, rapportée par Mr. *de Linné* à l'*Alethris*, conſtitue, comme il a déjà été dit ci-deſſus un nouveau genre. C'eſt ce qu'exige abſolument la figure de la corolle, avec la proportion, la ſituation, la flêchiſſure & l'inſertion des filamens, enfin le ſtyle même; toutes ces choſes réunies déterminent pleinement la ſéparation de cette eſpece d'avec celle de l'*Alethris hyacinthoïdes* qui la précede immédiatement.

Puiſqu'il s'agit donc d'un genre de plante nouveau & diſtinct, je n'ai point balancé à lui donner un nouveau nom, c'eſt celui de VELTHEIMIA; à l'honneur & pour conſerver la mémoire de Mr. le Baron *de Veltheim*, Préſident du grand Tribunal aulique, au ſervice de S. A. S. Monſeigneur le Duc de Brunſwick-Lunebourg, & Chevalier de l'Ordre de Heſſe du Lion d'or, un des principaux protecteurs & des plus judicieux eſtimateurs de tout ce qui peut contribuer à l'avancement des ſciences utiles & des beaux-arts, en particulier de ce qui concerne la Phyſique, l'œconomie des végétaux, la culture des arbres & arbuſtes de tout genre. On en trouve des preuves convaincantes dans ſon beau Jardin & dans toute ſa Seigneurie de *Harpke*, fort renommée par l'abondance & la beauté de toutes les productions ſusdites qui s'y trouvent, & qui s'étend juſqu'aux confins du territoire de Helmſtædt.

ESSAI
D'HYGROMÉTRIE OU SUR LA MESURE DE L'HUMIDITÉ.

PAR MR. LAMBERT.

§. 1.

Quoique de tous les Inſtrumens dont la Météorologie a été enrichie depuis plus d'un ſiecle, il n'y en ait gueres ou aucun qui ne demande encore quelque perfection ultérieure, on peut dire que celle des Hygrometres eſt reſtée le plus en arriere. Le barometre, dès ſa premiere invention, parla au moins un langage intelligible: le thermometre ne le parla pas d'abord. Ce n'eſt qu'en 1714 que *Fahrenheit* remit à Mr. *Wolf* deux thermometres correſpondans, & encore aujourd'hui ce langage n'eſt que comparatif. Mais les hygrometres ſe trouvent toujours dans la même imperfection qu'ils avoient depuis leur premiere découverte. C'eſt cependant l'inſtrument qu'on a le plus diverſifié, vu le grand nombre d'eſpeces très différentes les unes des autres qu'il y en a. Il ſemble même qu'on s'eſt plutôt appliqué à les varier & à leur donner pluſieurs ornemens, qu'à les conſidérer de plus près, pour apprendre à en connoître le langage, & à le rendre intelligible. Comme ce langage ne laiſſe pas d'être intéreſſant, j'ai cru ne point perdre mon tems en faiſant là-deſſus les recherches que je vais expoſer dans ce Mémoire, & qui pourront donner lieu à en faire enſuite bien d'autres. Entrons pour cet effet en matiere.

§. 2. Il n'eſt pas néceſſaire d'expliquer ce que c'eſt que l'*humidité*. On n'a qu'à paſſer par un brouillard pour s'en appercevoir; car c'eſt une humidité qui tombe ſous la vue & le tact. On la voit encore dans les vapeurs qui s'élevent des fluides bouillonnans. Elle ſe rend auſſi viſible, quand pendant l'hyver elle s'attache aux fenêtres, ou qu'elle couvre

couvre les objets exposés à l'air en forme de bruine, ou enfin lorsqu'elle se présente en forme de rosée, qui couvre la surface chevelue des plantes d'une infinité de petites gouttes. Enfin elle s'attache visiblement aux corps vitrés, métalliques &c. lorsque pendant l'hyver on les transporte du froid dans des chambres chauffées. En tout cela il n'y a rien qui ne soit connu de tout le monde. Un corps se nomme *sec*, lorsqu'il n'y a pas d'humidité perceptible; mais, si l'humidité va à un degré excessif, alors le corps est dit *mouillé*, ou encore *trempé*, lorsque pour le mouiller on le plonge dans l'eau ou quelque autre liqueur aqueuse. L'air est *humide*, lorsqu'il est sensiblement chargé de particules aqueuses; & quand il ne l'est pas sensiblement, on dit qu'il est sec. *Le degré d'humidité de l'air* c'est la masse ou encore le poids de toutes les particules aqueuses, qui nagent dans un certain volume p. ex. dans un pied cube d'air. Voilà donc à quoi doit se réduire le langage des hygrometres. Ce langage sera le plus intelligible, & en Physique il y a quantité de recherches qui l'exigent. Il faut savoir ce langage lorsqu'il s'agit de la vîtesse du son. Il est encore d'un grand usage dans la théorie des hauteurs barométriques. Il fait un article essentiel dans toute la Météorologie. Et même l'œconomie peut en tirer plus d'un usage, ne fût-ce que l'estimation du plus ou moins d'humidité des demeures, qui non seulement influe très considérablement sur la santé, mais encore sur tout ce qu'on y garde & sur les demeures elles-mêmes. Ce même langage répandra encore du jour sur la nutrition des végétaux, auxquels l'humidité peut être & utile & nuisible. Tâchons donc de la poursuivre dans les principaux phénomenes qu'elle offre pour être évalués & mesurés. Commençons pour cet effet à la voir dans sa naissance.

§. 3. Tout le monde sait ce que c'est que l'*évaporation*. L'eau s'évapore. C'est un phénomene qui ne sauroit être plus connu. Pour sécher un corps mouillé quelconque, on sait qu'on n'a qu'à l'exposer à l'air. On sait qu'il seche moins vîte lorsque l'air est humide, & que pour le sécher plus promtement, c'est au feu qu'il faut l'exposer. On sait encore que le soleil d'été seche efficacement, & que pendant l'hy-

ver le fourneau chauffé le fait également. Tout cela eſt connu, & même très connu. En eſt-il de même de la meſure de tous ces effets? C'eſt ce que je ne dirai pas. Ce n'eſt pas cependant qu'on n'ait rien fait à cet égard. Les meuniers, à qui il importe quelquefois de ménager l'eau, ſurtout en temps de ſéchereſſe & dans les endroits où les ſources ſont peu abondantes ou même ſujettes à tarir, les meuniers, dis-je, ont depuis longtems eu occaſion de tenir compte de l'évaporation de l'eau. Mais tout cela ne ſe faiſoit qu'en gros. La fameuſe queſtion ſur l'origine des ſources & des rivieres occaſionna des recherches plus exactes; & de là vint auſſi que parmi les inſtrumens météorologiques on rangea encore ceux qu'on fit pour meſurer la quantité des pluies & celle des évaporations.

§. 4. Dans les expériences qu'on a faites à cet égard, il n'étoit d'abord queſtion que de ſavoir en gros combien d'eau il s'évapore par an. Mr. de *Muſſchenbroek* paroit avoir été un des premiers qui ont ſongé à examiner, ſi l'évaporation s'accroît ſimplement en raiſon des ſurfaces, ou ſi la profondeur de l'eau entre également en ligne de compte. Il crut pouvoir déduire de ſes expériences, qu'à ſurfaces égales la quantité d'eau qui s'évapore en tems égaux des vaſes cylindriques ou prismatiques eſt en raiſon des racines cubiques des hauteurs, de ſorte qu'un vaſe de 8 pouces de hauteur évaporeroit deux fois plus, qu'un autre qui ne ſeroit que d'un pouce de hauteur, toutes choſes d'ailleurs égales. J'ignore ſi cet illuſtre Phyſicien a eu égard à toutes les circonſtances; mais je vois bien à quoi la queſtion peut être réduite lorsqu'il s'agit de la conſidérer phyſiquement. On ſait qu'il s'éleve de l'eau, ſurtout lorsqu'on la chauffe, un grand nombre de petites bulles d'air. Leur mouvement en montant eſt accéléré, & cela eſt très viſible. Enſuite elles augmentent de volume d'une façon également viſible. La raiſon de l'un & de l'autre phénomene eſt très claire. La vîteſſe s'augmente parce que ces bulles ſont 800 fois plus légeres que l'eau. Enſuite elles ſont moins comprimées à meſure qu'elles montent davantage. Enfin en montant il s'y joint encore de l'air qui ſe trouve dans les interſtices de l'eau, par lesquels elles ſe font chemin

en montant. Tout cela eſt très clair, & ſuſceptible d'un calcul que j'ai fait il y a plus de 12 ans, mais que je ſupprimerai ici, parce que je le trouve aſſez étranger au but que je me propoſe. Je dirai donc ſeulement que ces bulles d'air, quand elles parviennent à la ſurface, la ſoulevent; ce qui ſe comprend aiſément par les forces de cohéſion. Quelques unes reſtent dans cet état pendant plus ou moins de tems. Enfin la pellicule d'eau qu'elles élevent s'exténue en ce que l'eau découle, comme dans les bulles de ſavon, juſqu'à ce qu'enfin elles crevent en une infinité de petites gouttes, dont les plus groſſes retombent dans l'eau, tandis que les plus petites nagent dans l'air. On voit que par là le volume de l'eau diminue du moins tant ſoit peu, & ſi c'étoit là la ſeule cauſe de l'évaporation, il eſt clair que la profondeur de l'eau entreroit en ligne de compte, & que par la même raiſon l'évaporation dépendroit encore de la figure du vaſe. On voit auſſi que l'évaporation ſe feroit dans une raiſon beaucoup plus forte de la profondeur que celle que Mr. de *Muſſchenbroek* aſſigne. Car, comme à la bulle qui monte ſe joint tout l'air qu'elle rencontre, il eſt clair que l'accroiſſement de ſon volume dans chaque élément de l'eſpace eſt en raiſon de la ſurface du volume qu'elle a déjà acquis.

§. 5. Mais il s'en faut de beaucoup que ce ſoit là la ſeule cauſe de l'évaporation, quoique ſans contredit elle ſoit d'un grand effet dans les évaporations violentes, je veux dire dans la fermentation & dans l'ébullition, où c'eſt par force que l'air eſt chaſſé des interſtices qu'il occupoit. Mais partout où cet état violent n'a pas lieu, le nombre des bulles n'eſt pas fort grand & il diminue même juſqu'à ceſſer enfin tout à fait. Mais, comme nonobſtant cela l'évaporation va ſon train, il eſt clair qu'il faut en chercher une autre cauſe. Avec tout cela la queſtion de la profondeur de l'eau ſubſiſte encore; car il eſt clair que, ſi la cauſe de l'évaporation ſe trouvoit dans l'eau même, elle croîtroit plus ou moins en raiſon de la profondeur & généralement en raiſon de la maſſe de l'eau. L'expérience de Mr. de *Muſſchenbroek* ſemble l'inſinuer, & j'avois fait moi-même au mois de Janvier 1755 une expérience qui me conduiſoit au même réſultat; car ayant verſé dans un petit

vaſe

vase parallélipipede 240 grains d'eau, & l'ayant suspendu à une des balances que j'ai décrites dans les *Acta Helvetica*, dans une chambre qu'on chauffoit deux fois par jour, je trouvai l'évaporation plus forte au commencement que vers la fin. Il est vrai que le froid extérieur augmentant, la chambre s'en ressentit, au point que le thermometre de Réaumur restoit de 4 degrés plus bas. Mais je ne crus pas d'abord que cette différence pût altérer considérablement la vîtesse de l'évaporation. Ensuite le résultat différa totalement de la regle de Mr. de *Musschenbroek.* Je vis donc qu'il falloit entrer plus avant dans cette recherche.

§. 6. Comme cependant je différois d'une année à l'autre, le 8me Tome des Mémoires de l'Académie Royale de Suede me tomba entre les mains; j'y vis que Mr. *Wallerius* non seulement révoquoit en doute la regle de Mr. de *Musschenbroek*, mais qu'en détaillant les nombreuses expériences qu'il avoit faites, il établit que l'évaporation se fait simplement en raison des surfaces, sans que la profondeur y entre pour rien. Il conclut encore que la vîtesse de l'évaporation dépend de la chaleur & du vent, & ensuite il rapporte un grand nombre d'expériences faites sur l'évaporation des eaux salées & d'autres liquides. Toutes ces expériences paroissent faites avec beaucoup de soin, quoique pour la plupart d'entr'elles Mr. *Wallerius* n'ait employé que quelques heures ou tout au plus un ou deux jours. La principale loi qu'il établit, c'est celle des surfaces; & je n'hésite pas d'en inférer que la cause de l'évaporation ordinaire, c. à d. non-violente, (§. 4.) n'est pas dans l'eau, mais qu'elle doit être cherchée dans la contiguïté de l'air & de l'eau, ou pour parler plus clairement, il faut envisager l'air comme un fluide corrosif, dissolvant & absorbant, & établir que l'évaporation se fait par maniere de *solution*, ou que l'eau se dissout dans l'air comme les sels se dissolvent dans l'eau, ou les métaux dans l'eau forte ou régale.

§. 7. Le but de ce Mémoire exigeant des expériences faites sur l'eau douce, j'ai cru devoir faire moi-même toutes celles qui pour-

ront

ront y être de quelque utilité. Je commençai donc, pour m'assurer de la regle des surfaces, en observant l'évaporation qui se feroit de plusieurs verres à très peu près cylindriques, & de différente grandeur, non pendant quelques heures, mais pendant plusieurs mois, c. à d. depuis le 24 Avril 1767 jusqu'au 5 Septembre de la même année. J'aurois même continué ces expériences quelques semaines de plus, si je n'avois délogé alors. En voici le détail.

Je pris 5 verres à très peu près cylindriques, & j'en mesurai la hauteur, le diametre de la base & celui d'enhaut, en lignes du pied de Paris. Je numérotai ces verres par N°. 1, 2, 3, 4, 5. C'est ce que j'observe ici, afin de pouvoir y rapporter ce que je dirai dans la suite de ce Mémoire. Les mesures se trouverent être

	Hauteur	Diam. de la base	Diam. d'enhaut	Volume
N°. 1	80	31	$34\frac{3}{4}$	39 pouces cub.
2	$59\frac{1}{2}$	28	32	$24\frac{1}{2}$
3	38	26	32	$14\frac{1}{2}$
4	29	18	$20\frac{1}{2}$	5
5	25	14	18	3

Ensuite je les remplis d'eau que j'avois eue plusieurs heures dans la chambre. Tous ces verres furent placés sur le fourneau, qui dès-lors ne se chauffoit plus. Pendant tout le tems de l'observation ils y resterent sans que personne y touchât. Au bout de quelques jours il s'y posa successivement un peu de poussiere, mais qui partie coula à fond, partie s'attacha au verre à mesure que l'évaporation fit baisser la surface de l'eau. De cette façon l'eau elle-même resta claire pendant tout le tems de l'observation. Afin d'en mesurer la partie évaporée, j'avois d'avance collé à chaque verre en dehors une échelle divisée en lignes, en sorte qu'en mettant l'œil de niveau avec la surface, je voyois sans peine à quelle hauteur elle s'arrêtoit chaque fois. Le fourneau étoit de côté, en sorte que le vent n'y passoit pas directement. La plus grande partie du tems de ces observations une fenêtre du côté de l'Orient resta ouverte de jour, & pendant les grandes chaleurs qu'il fit

cette année-là au mois d'Août, je la laissai encore ouverte de nuit, quoiqu'en abaissant le rideau. Cependant je vis que tout cela n'altéroit pas beaucoup l'évaporation, quoique toutes les fois que la fenêtre resta fermée, elle diminuât sensiblement. Mais, pour aller d'abord au devant des doutes qui pourroient en naître au sujet de la regle de Mr. de *Musschenbroek*, on voit qu'il étoit nécessaire de prendre des verres de très différente hauteur. C'étoit le moyen d'avoir les résultats simultanés & successifs de l'évaporation. Les quatre premieres semaines me mirent en état de juger du reste. De là vient aussi que vers la fin je me bornai à répéter l'observation une fois par semaine, en négligeant même les circonstances du tems.

§. 8. Je renfermerai les résultats observés dans la table suivante, où la premiere colonne marque les jours & les heures, le signe — signifiant avant midi & le signe + après midi. Les cinq colonnes suivantes marquent les hauteurs de l'eau observées dans chaque verre en lignes & parties décimales de ligne. La septieme colonne indique l'état de l'air, la huitieme la hauteur du barometre, que je crois avoir été d'une ou de deux lignes trop bas, la neuvieme les degrés du thermometre de Réaumur & enfin la dixieme fait voir si la fenêtre a été ouverte ou non.

J. H. 1767.	1.	2.	3.	4.	6.	Temps.	Barom.	Th.	Fenêtre.
Avr. 24 + 5	78,0	57,2	35,7	27,2	21,1	clair, nuées	27. 8¾	11½	ouverte de jour
25 — 8	77,9	57,1	35,6	27,1	21,0	couvert	27.11	10½	
+ 3	77,2	56,8	35,3	26,8	20,7	nuées	27.11	10½	- - -
26 + 3	77,0	56,4	34,9	26,4	20,3	clair	27.11¾	10½	- - -
27 + 5	76,5	55,8	34,3	26,1	19,8	clair	27. 8¾	11	- - -
28 + 3	76,2	55,4	33,9	25,7	19,2	clair, nuées	27.10½	11	- - -
29 + 4	75,8	55,2	33,5	25,2	18,6	couvert, nuées	28. 2	11½	- - -
30 + 3	75,3	54,8	33,2	24,8	18,2	clair	28. 1½	10½	- - -
Mai 1 + 7	74,8	54,4	32,7	24,3	17,7	clair	28. 1½	9	- - -
2 + 5	74,6	54,0	32,4	23,9	17,3	cl. flocc. de neige	27.10½	9½	- - -
3 + 5	74,1	53,7	31,9	23,4	17,0	nuées	27.11	8	- - -
4						clair, pluie			fermée
5 + 4	73,3	53,0	31,4	22,8	16,3	couvert, pluie	27. 6	9	- - -
6 + 5	73,2	52,7	31,1	22,4	15,9	couvert, nuées	27. 7¾	9	- - -

7		2'				soleil			fermée
8 + 4	72,5	52,	30,5	21,8	15,2	nuées	27.11	11	ouverte
9						soleil, pluie			fermée
10 + 3	72,0	51,7	29,8	21,1	14,4	soleil, petite pluie	27. 9½	13	ouv. un peu
11 + 4	71,8	51,5	29,5	20,9	14,0	nuées, pluie	27.10	12	fermée
12 + 4	71,4	51,2	29,2	20,6	13,6	nuées, soleil	27.10¼	12½	ouv. 6 heures
13 + 7	70,9	50,9	28,7	19,9	12,9	soleil, clair	27. 9⅔	14⅓	ouv. 10 heur.
14 + 3	70,6	50,5	28,4	19,7	12,7	serein	27. 9½	17	ouv. de jour
15 + 4	70,2	50,0	27,9	19,3	12,4	p. pl. nuées	27.10½	16½	- - -
16 + 5	69,7	49,5	27,4	18,7	11,9	soleil, p. pl.	27. 8½	17	- - -
17 + 3½	69,3	49,1	26,9	18,1	11,3	clair	27. 9½	17	- - -
18 + 6	68,8	48,5	26,4	17,7	10,8	pluie, soleil	27. 9¼	16	- - -
19						soleil, nuées			- - -
20 + 3	68,0	47,8	25,6	16,9	9,9	nuées, soleil	27. 8¾	17	- - -
21						clair, nuées			- - -
22 + 6	67,0	46,8	24,7	15,8	9,2	clair	27. 8¾	17	- - -
23 + 3	66,5	46,5	24,2	15,4	8,8	pluie	27. 8	16	- - -
24 + 3	66,0	45,9	23,8	15,0	8,3	pluie, soleil	27. 7½	13	ouv. apr. midi
25 + 4	65,7	45,5	23,4	14,6	7,6	couv. pl.	27. 8½	13	fermée
26 + 3	65,3	45,2	23,0	14,2	7,2	pl. soleil, pl.	27. 6½	13½	- - -
27 + 4	64,9	45,0	22,7	14,0	7,0	pluie	27. 5	12½	- - -
28 + 4	64,6	44,7	22,3	13,7	6,7	soleil, clair	27. 6	13	ouverte
29						soleil, nuées			- - -
30						soleil, nuées			- - -
31 + 3	63,3	43,2	21,0	12,5	5,4	soleil, nuées	26. 7½	17	- - -
Juin 1						clair			- - -
2						clair, serein			- - -
3 + 5	61,3	41,3	19,4	10,8	4,1	serein	26. 7½	18	- - -
4						serein, nuées			- - -
5						serein			- - -
6 + 7	58,5	38,4	16,8	8,5	1,8	serein	27. 3	17	- - -
7 + 4	57,7	37,6	16,1	8,0	1,0	serein	28. 1½	18	- - -
14 + 3	52,4	33,5	11,8	3,8					- - -
21 + 6	49,0	30,3	8,4						- - -
28 + 3	46,2	27,1	5,1						- - -
Juill. 5 + 5	42,8	24,5	1,6						- - -
13 + 1	39,3	20,5							- - -
Août 2 + 4	20,5	8,5							- - -
6 — 10	24,5								- - -
9 + 10	22,2								- - -
16 — 8	16,8								- - -
23 — 8	13,5								- - -
30 — 10	10,8								- - -
Sept. 5 + 4	8,5								- - -

§. 9. Je ne m'arrêterai pas à faire de longues comparaisons entre les nombres de cette table, tandis qu'on les fera comme d'un seul coup d'œil quand ces nombres se changent en figure. Car on comprend sans peine que le tems peut être représenté par des abscisses, & que les ordonnées pourront représenter la hauteur de l'eau. C'est ce que j'ai fait dans la premiere Figure, où on voit la ligne des abscisses divisée en semaines à commencer depuis le 26 Avril. On y voit encore les cinq lignes courbes 1, 2, 3, 4, 5, dont les ordonnées expriment la hauteur de l'eau dans les verres répondans à ces numéros. L'ordonnée du 26 Avril est divisée en pouces, & le premier pouce en 12 lignes, servant d'échelle pour les ordonnées. De cette maniere on voit d'abord que ces cinq lignes courbes ne se courbent pas beaucoup, mais qu'elles gardent entr'elles un certain parallélisme. D'abord elles ne baissent pas beaucoup, & cela vient de ce qu'au mois de Mai la fenêtre étoit souvent fermée & la chaleur très petite. Mais vers le mois de Juin ce double obstacle de l'évaporation cessa, & cela fait aussi que ces courbes dès-lors baissent davantage. Vers la fin de ce mois la chaleur diminua & la fenêtre ne fut pas toujours ouverte; aussi voit-on que ces courbes alors baissent un peu moins, quoique toujours fort parallélement. Il est donc visible que la regle de Mr. *Wallerius* est très fondée, & qu'on peut établir que l'évaporation suit simplement la raison des surfaces, ou bien que la hauteur verticale diminue en raison simple du tems, toutes choses d'ailleurs égales, c. à d. même exposition, même chaleur, même air &c.

Planche I. Fig. 1.

§. 10. Comme dans ces observations les verres se trouvoient dans la chambre, il est très naturel de conclure que l'évaporation se fit plus lentement que s'ils avoient été exposés à l'air extérieur, & surtout à un air d'été bien sec. Je trouve cependant qu'en prenant un terme moyen l'évaporation pendant 120 jours avoit été de 66 lignes ou $5\frac{1}{2}$ pouces, ce qui pendant toute une année produiroit à très peu près 18 pouces. Et c'est là précisément la hauteur moyenne de la pluie de toute une année. On voit qu'il y a là des circonstances qui se compensent. Car, quoiqu'en été l'évaporation soit plus forte en plein air, il n'est pas douteux qu'en échange elle ne soit beaucoup moins

moins forte en d'autres tems, & ſurtout pendant les grands froids, ou lorſque l'air, pour être déjà ſurchargé d'humidité, n'en reçoit plus davantage.

§. 11. Mais, pour voir ce qui arriveroit non ſeulement en plein air, mais même au ſoleil de la canicule, je me prévalus de quatre beaux jours ſucceſſifs qu'il fit depuis le 6 juſqu'au 9 Août de la même année. Je remplis donc les verres N°. 2, 3, 4, 5, & je les expoſai à une fenêtre ouverte, où le ſoleil donnoit depuis le matin juſqu'au ſoir, vu que la fenêtre avoit le ſoleil du midi en face à environ 5 degrés près. Et quoique le beau tems fût interrompu, je ne laiſſai pas de continuer ces obſervations juſqu'à ce que l'eau fût toute évaporée, ce qui arriva de la façon qu'on va voir dans la Table ſuivante.

J. H.	1.	2.	3.	4.	5.	Temps.		Th.	Fenêtre
Août 6—10		48,5	34,0	26,2	20,2	ſerein			ouverte
7+1		44,2	28,7	20,8	14,2	ſerein		22	rideau
8—8		40,6	25,7	18,0	10,2	ſerein, clair		25	abaiſſé
9—8		36,6	22,3	13,8	5,3	ſerein		25	
10—8		33,5	19,2	11,0	1,5	clair		25	
11—8		30,5	16,0	7,5		couvert, clair		25	
12—8		27,2	12,8	4,5		clair		25	
13—7½		24,0	9,8			clair			
14—8		20,5	7,0			clair, nuées		21	
15—10		17,5	2,5			nuées, pluie		20	
16—8		15,4				clair, pluie		19	
17—8		11,7				ſoleil, pluie		17	
18—8		10,0				nuées, ſol. couv.		17	
19—9		8,0				pluie, couvert		17	
20—8		7,2				couvert, ſoleil		15	
21—8		5,3				nuées, pluie		15	
22—8		4,3				ſoleil		15	
23—8		3,0				couvert, ſoleil		17	
24—8		1,5				nuées, pluie		17	
25—8		0,5				ſoleil		17	

§. 12. On voit bien qu'ici tout alloit plus vîte. En effet le verre N°. 5. fut mis à ſec en 4½ jours, tandis que dans l'expérience précédente il fallut 45 jours, & partant 10 fois plus de tems. Sur cette table j'ai conſtruit la ſeconde Figure, où on voit les quatre lignes courbes N°. 2, 3, 4, 5, répondantes aux quatre verres employés dans cette expérience. L'abſciſſe eſt diviſée en jours, depuis le 6 d'Août juſqu'au 14, & le premiere ordonnée repréſente les pouces & lignes Fig. 2. de la hauteur de l'eau. Les courbes ſont encore ici fort peu courbes, mais le parallèliſme n'eſt plus ſi bien obſervé, ſurtout la courbe N°. 5. baiſſe plus fortement, ce que je crois venir de ce que le verre ayant été plus petit, il pouvoit ſe chauffer plus facilement. Enſuite, pour fermer la fenêtre vers la nuit, il falloit ôter les verres, & la difficulté de les remettre dans la même poſition paroit avoir produit l'anomalie qui ſe voit dans la courbe N°. 4. depuis le 10 d'Août. Enfin les verres ne pouvoient pas tout à fait être placés en ſorte que le ſoleil commençât & ceſſât d'y donner dans un même inſtant. Avec tout cela on voit que les courbes ſont presque droites, & qu'elle affectent ſenſiblement le parallèliſme. J'en infere qu'encore dans les cas où le ſoleil contribue à accélérer l'évaporation, elle ſuit ſimplement la loi des ſurfaces, en ce que la hauteur de l'eau diminue en raiſon ſimple du tems, toutes choſes d'ailleurs égales.

§. 13. Au mois d'Octobre je remplis encore le verre N°. 3, & je le plaçai devant une fenêtre vers le Nord, où le ſoleil ne donnoit point. L'eau dans ce verre depuis le 22 Octobre juſqu'au 15 Novembre baiſſa par la ſimple évaporation depuis 33 lignes de hauteur juſqu'à 24,7 lignes, & partant de 8,3 en 24 jours, ce qui eſt moins que dans la premiere expérience. Auſſi le thermometre pendant ces 24 jours s'arrêta toujours entre 5 & 9 degrés au deſſus du tempéré.

§. 14. Mais, pour achever d'examiner la regle des ſurfaces, je profitai de l'hyver ſuivant, pour placer les verres ſur le fourneau chauffé. Je n'y mis d'abord que le verre N°. 3, afin d'en voir le ré-

ſultat

ſultat comme en gros. Comme le froid n'étoit pas encore très fort, je ne fis chauffer que le matin. Le thermometre en plein air ſe trouva d'un ou de 2 degrés au deſſous du terme de congélation, & dans la chambre il varia entre 8 & 12 degrés, ſuſpendu près de la fenêtre. J'obſervai la hauteur de l'eau chaque matin avant qu'on chauffât, & elle ſe trouva

le 3 Decembre	- - - -	30,5 lignes
4	- - - -	26,5
5	- - - -	21,2
6	- - - -	17,0
7	- - - -	10,5
8	- - - -	5,5
9	- - - -	0

De là je vis que l'évaporation étoit très conſidérable, & qu'elle n'étoit gueres inférieure à celle du 6 — 10 Août produite par le ſoleil en plein air.

§. 15. Là-deſſus je plaçai ſur le fourneau les verres N°. 2, 3, 5, & l'évaporation ſe trouva être

	J.		H.	1.	2.	3.	4.	5.
1767. Dec.	10	—	8		56,5	33,3		21,0
			0		56,0	32,3		19,5
		+	2½		54,7	32,0		18,5
		+	9		54,2	31,6		17,2
	11	—	9		53,5	31,0		16,8
			0		52,8	30,3		14,3
			2		51,8	29,4		13,0
			6		51,0	28,5		11,6

12		0		48,6	26,6		8,7	
	+	8		46,2	24,8		5,6	
13	—	9		45,5	23,6		4,6	
		0		45,0	23,2		2,6	
	+	12		42,7	21,3		0	
14	—	9		42,0	21,0			
	+	12		38,0	17,0			
15	—	9		37,5	16,5			
		0		36,4	15,0			
	+	10		35,0	14,0			
16	—	9½		34,2	12,8			
17	—	9		28,8	7,6			
		0		27,2	5,2			
	+	6		25,3	3,3			
18	—	8½		24,0	2,1			
		0		20,6	0		21,6	rempli de nouveau
	+	2½		19,6			19,7	
19	—	9		17,5			17,5	
		0		15,0			14,0	
	+	6		12,0			10,0	
20	—	8½		10,7			9,0	
		0		9,0			6,2	
	+	2		7,2			3,6	
	+	7		6,0			1,5	
21	—	11		0			0	
22	—	9		57,8				rempli de nouveau
		0		55,2				
	+	2		51,8				
	+	8		49,0				

23	—	8		48,0			
		0		46,0			
	+	10		42,7			
24	—	9		42,0			
	+	2		38,6			
	+	9		36,2			
25	—	8		35,7			
		0		32,8			
	+	9		29,0			
26	—	8		27,2			
		0		24,0			
27	—	8		20,0			
		0		17,0			
	+	2		15,0			
28	—	9		12,7			
	+	2		6,6			
	+	8		5,2			
29	—	9		4,5			
		0		0			

§. 16. Ces obſervations confirment aſſez ſenſiblement la loi des ſurfaces. Les petites irrégularités qui s'y obſervent, proviennent non ſeulement de ce qu'il n'étoit pas poſſible de chauffer également, mais de ce que peu à peu il falloit chauffer davantage à cauſe du froid qui alloit en augmentant, de ſorte que le 15 il commença à geler & le 26 le thermometre en plein air baiſſa juſqu'à 8 degrés au deſſous du terme de la glace. L'évaporation en devint plus forte & même d'une façon aſſez réguliere. Je dois encore remarquer que les verres N°. 2. & 5. ſe trouverent placés aſſez également; mais le verre N°. 3. avoit été plus près du mur. Cela fit auſſi qu'il ſe chauffa moins, & que l'évaporation en fut plus lente. Du reſte je ſupprime les lignes courbes que j'ai conſtruites d'après ces obſervations. Elles ſe cour-

bent assez régulierement, en sorte que, nonobstant les petites inflexions journalieres qui leur donnent une figure serpentante, elles tournent la concavité vers l'axe, ce qui est une marque de l'évaporation accélérée. J'ai par-là appris encore qu'il falloit les répéter d'une façon plus détaillée, & surtout qu'il falloit mettre dans l'eau un thermometre, afin de tenir compte des changemens de chaleur.

§. 17. Pour cet effet je n'employai que le verre N°. 3, que je plaçai tout près de la partie supérieure du fourneau. J'y plongeai un thermometre; j'en avois un autre à côté de la fenêtre du midi, & un troisieme en plein air au Nord. Je marquai encore le tems qu'il faisoit, & l'heure où le fourneau fut chauffé. Ces observations durerent depuis le 2 Janvier jusqu'au 6; le 5 il fallut remplir de nouveau le verre, & le 7 je le remplis encore, en le plaçant un peu plus près du mur. Voici les observations telles que je les ai faites.

1768. Janv.	J.		H.	N°. 3.	Temps	Thermometres dans le verre	dans la chambre	en plein air
	2	—	9½	33,5	*chauffé* - -	0	6	— 13
		—	10	33,7	brouillard -	35		
		—	11	33,1	- - - - -	50		
		+	0½	31,3	- - - - -	48		
		+	2	29,7	- - - - -	40	10	
		+	3,10	28,8	soleil - -	34		
		+	8,10	27,0	clair - - -	28		
	3	—	9, 0	25,8	*chauffé*, clair	8	3½	— 14
		—	10,10	25,8	- - - - -	28	5¼	
		+	0,45	23,7	soleil - -	50	8	
		+	2,10	21,4	clair - - -	43		
		+	3,55	20,3	- - - - -	35		
		+	8,45	18,3	- - - - -	18		

4	—	8, 0	17,3	*chauffé* - -	6	2¾	— 14½
	—	10,20	17,3	- - - - -	23	4	
	—	11,56	15,9	- - - - -	49	7	
	+	1,20	13,6	- - - - -	45	9	
	+	5,50	10,9	nuées . - -	25	6	
5	—	8,45	9,1	*chauffé*, clair	8	2	— 13
	—	10,55	8,5	- - - - -	49	6	
	—	11,54	5,9	- - - - -	56	9	
	+	0,55	3,0	- - - - -	50	10	
	+	2,12	34,7	- - - - -	28	10	rempli de nouveau
	+	6,55	32,8	*chauffé* - -	30	8	
	+	8, 1	31,8	- - - - -	44	9	
	+	9, 5	30,7	- - - - -	43	9½	
	+	10,10	29,5	- - - - -	38	9½	
	+	10,40	29,3	- - - - -	36	9	
6	—	8,43	26,7	*chauffé* - -	12	5	
	—	9,55	26,4	- - - - -	24	6	
	—	10,28	26,2	- - - - -	42	7½	
	—	10,55	25,5	- - - - -	53	9	
	—	11,15	25,0	- - - - -	58	10	
	—	11,34	24,0	- - - - -	60	11	
	+	0,12	22,2	- - - - -	60	11½	
	+	0,48	21,0	- - - - -	56	12	
	+	1,12	20,0	- - - - -	52	12¼	
	+	1,42	19,1	- - - - -	50	12¼	
	+	2, 6	18,1	- - - - -	48	12¼	
	+	4, 9	15,9	- - - - -	35	11	
	+	4,42	15,7	- - - - -	32	10¼	
	+	5,50	15,0	- - - - -	30	10	
	+	7, 7	14,2	- - - - -	27	9	
	+	8,10	13,8	- - - - -	22	8½	
	+	9, 8	13,8	- - - - -	21	8	

7	—	8,40	35,5	*chauffé* - -	6	$4\frac{1}{3}$	— 9	rempli de nouveau
	—	9,24	35,5	- - - - -	11	5		
	—	10, 0	35,4	- - - - -	20	$5\frac{1}{2}$		
	—	11,53	34,2	- - - - -	45	10		
	+	0,45	33,5	- - - - -	42	11		
	+	1,22	33,0	nuées minces	40	$11\frac{1}{2}$		
	+	2, 8	32,2	*chauffé* - -	38	10		
	+	3, 4	31,6	*chauffé* - -	38	$10\frac{3}{4}$		
	+	6,38	29,1	- - - - -	37	$10\frac{1}{2}$		
	+	7,43	28,8	- - - - -	34	$10\frac{1}{2}$		
	+	8,30	28,2	- - - - -	31	$10\frac{1}{4}$		
	+	10,13	27,4	- - - - -	26	$9\frac{3}{4}$		
8	—	8,15	25,6	*chauffé* - -	11	$5\frac{1}{2}$	— 10	
	—	9,33	25,2	- - - - -	22	$6\frac{1}{2}$		
	—	10, 7	25,1	- - - - -	30	$7\frac{1}{2}$		
	—	10,45	25,0	- - - - -	35	8		
	+	0,21	23,8	- - - - -	37	9		
	+	1,25	23,0	- - - - -	35	$9\frac{1}{4}$		
	+	2,58	21,9	- - - - -	30	9		
	+	9, 6	18,8	*chauffé* - -	18	7		
	+	10, 6	18,6	- - - - -	31	$7\frac{1}{2}$		
9	—	8,20	16,6	*chauffé* - -	12	5	— $8\frac{1}{2}$	

Dans ces expériences il arriva à propos que les trois premiers jours l'eau se chauffa à un degré près également. Cela m'engagea à comparer la marche du thermometre avec l'abaissement de l'eau dans la troisieme Figure. L'axe y est divisé en jours & le premier jour en heures. On y voit de même pour les ordonnées une échelle qui représente les lignes de l'abaissement de l'eau & une autre qui représente les degrés du thermometre. La courbe pour l'abaissement de l'eau descend en serpentant, mais on voit que cela se fait les trois premiers jours entre deux droites paralleles; le cinquieme elle descend au dessous

Fig. 3.

ſous, mais auſſi alors le thermometre avoit été de 10 degrés plus haut, & cela explique l'anomalie qui ſe voit là où la courbe va joindre l'axe. Comme, les trois jours précédens, la marche du thermometre étoit à très peu près la même, on voit auſſi que les inflexions de la courbe de l'évaporation ſont très ſemblables. Il s'enſuit donc que la loi des ſurfaces a lieu encore quand l'eau eſt chauffée juſqu'au 50 degré du thermometre de Réaumur. On voit encore combien le degré de chaleur influe ſur la vîteſſe de l'évaporation.

§. 18. Comme dans toutes ces expériences je me ſuis borné à meſurer la hauteur de l'eau, afin de ne point remuer les verres, il eſt clair que cette hauteur a toujours été augmentée par la dilatation produite par la chaleur. Mais l'effet n'influe presqu'en rien ſur le réſultat de ces obſervations. Car l'eau ſe dilate à peine la moitié autant qu'un eſprit de vin médiocre, de ſorte qu'encore que nous ſuppoſions une dilatation de 40 ſur 1000 pour l'intervalle entre la glace & l'eau bouillante, cela ne produiroit qu'une dilatation de 25 ſur 1000 pour les 50 degrés du thermometre, de ſorte que la hauteur de l'eau n'en fut augmentée que d'une $\frac{1}{40}$ partie, tout au plus. Or, comme l'eau ſe chauffa fort vîte, l'effet qui en réſulta fut que, tandis que le fourneau fut chauffé, ou tandis que le thermometre monta, la hauteur de l'eau reſta presque la même, & qu'elle en baiſſa enſuite un peu plus vîte quand le thermometre deſcendit. Mais, l'effet étant très petit, j'en ai fait abſtraction, quoique du reſte il eût été facile de faire la réduction requiſe.

§. 19. Pour ce qui regarde l'obſervation du 6 Janvier, je l'ai repréſentée plus en grand dans la quatrieme Figure. L'abſciſſe eſt diviſée en heures, & la premiere heure de 10 en 10 minutes. Pour les ordonnées on y voit deux échelles, dont la premiere eſt pour le thermometre, la ſeconde pour l'évaporation. La courbe ABC fait voir la marche du thermometre, ou l'échauffement de l'eau. Et la courbe DEF offre l'abaiſſement de ſa ſurface. Je me ſuis ſervi d'une ſemblable figure, mais deſſinée plus en grand, pour comparer la vîteſſe de l'évaporation avec les degrés de chaleur. Pour cet effet il fallut Fig. 4.

 pour

pour chaque ordonnée PH tirer une tangente EG, afin d'en inférer: Comme le tems PG est à EP, ainsi un tems de 24 heures à un quatrieme nombre, qui exprime combien de lignes s'évaporent dans l'intervalle d'un jour lorsque la chaleur de l'eau est pendant tout ce tems = PH. Par ce moyen je trouvai qu'il répond à la

chaleur de		l'évaporation diurne de
61°	- - - - - -	67 lignes
60	- - - - - -	65
49	- - - - - -	$39\frac{1}{2}$
35	- - - - - -	17,2
23	- - - - - -	8,7

Fig. 5. Ces nombres, avec une légere correction qu'il fallut donner au dernier, forment la courbe de la cinquieme Figure. Les abscisses sont divisées en degrés du thermometre, & les ordonnées en pouces & lignes de l'évaporation répondante. Comme la courbe tourne sa convexité vers l'axe, il s'ensuit que l'évaporation augmente en plus forte raison que les degrés du thermometre.

§. 20. Dans ces expériences la chaleur n'alloit que jusqu'au 60 degré, tandis que l'eau bouillante va jusqu'au 80me. Il restoit encore à voir ce qui arriveroit lorsque l'eau bouilliroit excessivement. Pour cet effet je pris un cylindre de fer blanc, d'un diametre de 16 lignes, & de la hauteur de 22 lignes. J'y versai de l'eau bouillante & l'ayant mis sur la braise, pour continuer l'ébullition, je trouvai que dans l'espace de 25 minutes toute l'eau s'étoit évaporée. Le cylindre ayant été rempli à 20 lignes de hauteur, cela donne 48 lignes ou 4 pouces par heure, & partant 96 pouces ou 8 pieds par jour. Cette quantité est très considérable. Mais ce n'est plus la simple évaporation qui la produisit. L'eau bouillonna excessivement, & jetta une infinité de petites gouttes dans l'air, dont une grande partie ne retomba plus dans le cylindre à cause du peu de largeur qu'il avoit. Du reste j'ai déjà observé ci-dessus ce qui arrive dans cette espece d'évaporation

ration violente (§. 4.) & cela fait qu'elle ne sauroit être comparée avec les expériences que je viens de rapporter.

§. 21. Il seroit assez difficile d'assigner *a priori* une équation algébrique, qui satisfît à la courbe qu'offre la cinquieme Figure. Il faudroit pour cet effet mieux connoître la façon dont l'air agit sur l'eau & les forces de cohésion qui s'y opposent dans l'eau même; mais nous pourrons toujours indiquer les symptomes généraux, auxquels cette courbe doit satisfaire. D'abord, on sait que la vertu corrosive ou dissolvante de l'air agit encore sur la glace. Cela fait que le point A, quoiqu'il réponde au terme de congélation, n'est pas le commencement de la courbe, mais que la courbe y coupe l'axe ou la ligne des abscisses sous un angle fini, de sorte que l'abscisse peut encore devenir négative, quoique suivant toute apparence il y ait pour les premiers degrés négatifs quelque petite anomalie. Ensuite, comme la courbe tourne assez uniformément sa convexité vers la ligne des abscisses, il n'est pas douteux que cela ne continue au delà du 60me degré de chaleur, quoiqu'à mesure qu'elle s'approche du 80me degré, les effets de l'évaporation violente (§. 4.) commencent à devenir sensibles & à prédominer enfin. Cela fait donc croître les abscisses encore plus fortement qu'elles ne croissent dans la figure, qui ne s'étend que jusqu'au 60me degré. On peut tirer de cette courbure quelque conclusion relativement aux forces qui agissent dans l'évaporation. Car, comme l'évaporation suit la loi des surfaces, j'en ai déjà inféré ci-dessus que la force active doit être cherchée dans l'air (§. 6.). Cette force agit avec plus de facilité lorsque les forces de cohésion dans l'eau se trouvent diminuées, & il est clair que la chaleur y contribue par la dilatation qu'elle produit. Cette dilatation diminue les forces de cohésion, parce qu'on voit que l'eau est d'autant plus fluide qu'elle est plus chaude. Ensuite elle amplifie les interstices qui se trouvent entre les particules d'eau, & cela donne un accès plus libre aux particules d'air, pour absorber celles de l'eau avec plus de facilité. La courbe fait voir que cet effet va en augmentant. Cependant je ne dirai pas que l'ordonnée qui répond au 80me degré de chaleur, en soit l'asymptote.

Car

Car, quelque forte qu'y ſoit l'évaporation, l'expérience rapportée ci-deſſus (§. 20.) montre qu'elle n'eſt pas inſtantanée, mais qu'elle a un degré fini de vîteſſe. Enſuite on ſait que le degré d'ébullition de l'eau dépend de la hauteur du barometre, & que dans la machine de *Papin* on peut lui donner un degré de chaleur conſidérablement plus grand. On ſait encore qu'en jettant de l'eau dans du cuivre fondu, cela produit une eſpece d'ébullition inſtantanée & même très dangereuſe. Enfin on ſait qu'en la jettant ſur l'argent fondu, elle y reſte en grande partie, & qu'elle ne s'y évapore que fort lentement. Il ſemble que dans ce cas l'air en eſt d'abord entierement chaſſé, & que les particules terreſtres de l'eau s'y chauffent juſqu'à s'embraſer. Il eſt donc clair que la courbe de la cinquieme Figure, après avoir paſſé l'ordonnée du 80me degré, ou en général celui de ſon ébullition ordinaire, non ſeulement continue, mais qu'elle y ſuit des loix qu'il eſt aſſez difficile de prévoir. On pourra cependant voir là-deſſus un petit, mais excellent, traité de Mr. *Leidenfroſt*, imprimé à Duisbourg en 1756, & dédié à l'Académie: *De aquæ communis nonnullis qualitatibus.*

§. 22. Quoique donc la courbe de la cinquieme Figure ne ſoit pas ſi facilement déterminée par la théorie, cependant quand il ne s'agit que d'en faire uſage, nous pourrons en attendant nous borner à lui ſubſtituer une courbe du genre parabolique, qui ne s'en écarte pas ſenſiblement depuis 0 juſqu'au 60me degré de chaleur, ce qui ſuffira du moins pour les effets de l'évaporation ſimple ou non forcée. Voici donc ce que j'ai trouvé. Soit x le degré du thermometre au deſſus du point de congélation, y le nombre de lignes d'eau qui s'évaporent dans l'eſpace de 24 heures, lorsqu'elle a le degré de chaleur x; il ſera à très peu près

$$y = \tfrac{2}{15}x + \tfrac{1}{200}x^2 + \tfrac{13}{720000}x^3 + \&c.$$

Ou bien, en comptant les degrés par dixaines, ſoit $\xi = 10x$, & il ſera

$$y = \tfrac{4}{3}\xi + \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{13}{72}\xi^3 + \&c.$$

Com-

Comparons cette formule aux ordonnées de la courbe. Il fera

x	ξ	ordonnée	calcul
10	1	2	$2 + \frac{1}{72}$
20	2	6	$6 + \frac{1}{9}$
30	3	13	$13 + \frac{3}{8}$
40	4	24	$24 + \frac{8}{9}$
50	5	41	$41 + \frac{53}{72}$
60	6	65	65

On voit de là que les différences font toutes au deffous d'une ligne. Mais il y a dans la formule

$$y = \tfrac{4}{3}\xi + \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{13}{72}\xi^3 + \&c.$$

une autre circonftance qui mérite quelque attention; c'eft qu'on n'a qu'à en fouftraire

$$\tfrac{1}{3}\xi \quad * \quad + \tfrac{1}{72}\xi^3$$

pour avoir

$$y' = \xi + \tfrac{1}{2}\xi^2 + \tfrac{1}{6}\xi^3 + \&c.$$

§. 23. Cela m'a fait préfumer qu'il pourroit bien être

$$y = e^{\xi} - 1.$$

J'ai donc cherché à adapter aux ordonnées une équation logarithmique, & j'ai trouvé que la fuivante

$$\log\left(\frac{3y + 13}{13}\right) = \frac{x}{60}\log 16$$

y fatisfait à environ une ligne près. Cette formule fe trouve en mettant pour bafe les ordonnées 0, 13, 65, qui répondent aux abfciffes équidiftantes 0, 30, 60. En la comparant aux ordonnées de la figure, on trouve

x	ordonnée y	calcul
0	0	0
10	2	2,54
20	6	6,57
30	13	13
40	24	23,10
50	41	39,33
60	65	65

d'où l'on voit que les différences sont très petites. En admettant cette formule qui se réduit à

$$\log\left(y + \frac{13}{3}\right) = \frac{x}{60} \log 16 + \log \frac{13}{3},$$

on voit qu'il faudra tant soit peu abaisser l'abscisse AB, afin de la faire coïncider avec l'asymptote de la courbe AC. Ensuite le commencement des abscisses A doit être avancé un peu vers la quatrieme Figure ou le devant de la table; ce qui aura lieu en posant

$$y + \frac{13}{3} = \eta,$$

$$x + \frac{60}{\log 16} . \log \frac{13}{3} = z.$$

On aura par-là

$$\log \eta = \frac{\log 16}{60} . z,$$

ou bien

$$\log \eta = m . z,$$

ce qui donne

$$d\eta = m\eta dz,$$

c'est à dire, l'accroissement de l'évaporation $d\eta$ est en raison composée du degré de l'évaporation η & de l'accroissement de la chaleur dz,

ce

ce qui veut encore dire qu'en posant $ds = const.$ la cause qui accélere l'évaporation est proportionelle à l'évaporation même. Cette loi, qui est très simple, ne doit pas être étendue aux évaporations forcées; car elle n'a été déduite que des évaporations simples, qui se font sans fermentation & sans ébullition violente, mais uniquement par l'action absorbante de l'air, aidée par la chaleur. Elle donne pour le 80me degré de chaleur 170 lignes d'évaporation simple. On voit bien que cela differe beaucoup des 8 pieds que donne l'expérience rapportée au §. 20. J'en ai suffisamment détaillé la raison, de sorte que cette différence n'ôte rien à l'admissibilité de la formule que nous venons de trouver.

§. 24. L'évaporation dépend encore de différentes autres circonstances. D'abord il est fort à présumer que la hauteur du barometre ou le poids de l'atmosphere y influe. Les vapeurs, les brouillards & les nuées montent & descendent assez régulierement avec le barometre. Réciproquement, la chaleur de l'eau bouillante étant plus grande à mesure que le barometre s'éleve d'avantage, il s'ensuit que l'eau bouillante s'évapore plus facilement à mesure que l'air est moins comprimé. Mais, pour déterminer ces effets, il faudroit comparer l'évaporation qui se fait sur les plus hautes montagnes avec celle qui s'observe au niveau de la mer, toutes choses d'ailleurs égales, c'est à dire, même eau, même chaleur, même humidité de l'air &c. On sait aussi que, même dans le vuide, l'eau engendre peu à peu un nouvel air & des vapeurs, quoique cela se fasse fort lentement.

§. 25. Ensuite l'évaporation est moindre à mesure que l'air est plus chargé d'humidité. Et comme les vapeurs ne s'envolent qu'assez lentement de la surface de l'eau, il s'ensuit que l'air voisin est toujours fort humide. Voilà donc une des causes pourquoi le vent accélere l'évaporation, c'est qu'il emporte l'air humide & en amene de plus sec. A cette cause il s'en joint une autre, c'est que le vent donnant sur l'eau, renforce l'action absorbante de l'air. Pour établir là-dessus certaines regles, il faudra commencer par comparer l'évapora-

tion

tion avec le degré d'humidité. Mais, comme les expériences que j'ai faites là-dessus sont encore rélatives aux hygrometres, il convient de commencer par examiner ces instrumens.

§. 26. Je ne donnerai pas ici la description de toutes les especes d'hygrometres qu'on a imaginées. On les trouve dans la plûpart des traités de Physique expérimentale, avec plusieurs remarques sur leurs différens degrés de bonté & de sensibilité. Ceux qu'on fait de sel imbibent l'humidité assez facilement, mais ils ne la relâchent qu'avec peine. Ceux qu'on fait de bois ne paroissent pas être fort durables, surtout si d'abord on y a employé du bois frais; il perd peu à peu la facilité qu'il avoit de gonfler par l'humidité de l'air, quoique peut-être vers la fin il se mette dans quelque état de permanence. J'ai vu des planches de bois de sapin, qui avoient en séchant perdu au delà d'une 30me partie de leur largeur. Mr. *Leutmann* dans son Traité des instrumens météorologiques vante fort les hygrometres faits de cordes de violon, imprégnées de quelque sel alcalin. Il dit que, même après un intervalle de dix ans, il les a trouvées encore de la même bonté & sensibilité. J'ignore de quelle maniere il s'en est assuré, & je crois que le sel ne devoit servir qu'à les rendre plus sensibles. Mais l'expérience m'a fait voir qu'elles le sont assez indépendamment du sel. Il y a plus de 15 ans que j'en ai fait pour des observations météorologiques, sans m'appercevoir qu'elles se soient sensiblement gâtées. Il convient de n'en point employer qui soient huilées, parce que l'huile ne seche qu'avec une lenteur extreme. Mr. *Leutmann* conseille de prendre des cordes fort grosses; ce sera probablement pour qu'elles en soient plus roides & moins sujettes à se courber. Mais on conçoit aisément qu'elles sont plus sensibles à mesure qu'elles sont plus minces. Les hygrometres qu'on fait des éponges ne sont gueres sensibles, à moins qu'on ne les impregne de sel. Ils ont l'avantage d'indiquer le poids de l'humidité. Mais comme ils doivent rester exposés à l'air, on ne sauroit empêcher que peu à peu il n'y tombe de la poussiere, ce qui en augmente le poids sans que l'air en soit d'autant plus humide. Ainsi les cordes faites de boyaux sont toujours préférables. Mais, comme dans tout cela

cela on n'a encore ni des principes théorétiques, ni des expériences faites à dessein, pour voir clair dans cette matiere, il faudra entrer dans un champ qu'on n'a point encore cultivé du tout. Commençons à le défricher.

§. 27. On sait que les cordes faites de boyaux, de chanvre, de lin &c. changent de longueur & qu'elles se tournent suivant les changemens d'humidité. On rapporte des expériences qui font foi du changement de longueur. *Schwenter* dit que les cordes dont il se servoit pour l'arpentage s'étoient raccourcies de la seizieme partie, ou d'un pied sur seize. On raconte encore que, pour achever d'élever l'obélisque de *Sixte-quint*, le Méchanicien *Fontana* se vit obligé de mouiller les cordes pour les raccourcir. Je ne sais pas comment ces cordes étoient faites; car ayant mouillé des cordes de boyau & des ficelles de chanvre, je vis qu'elles se détortilloient, qu'elles gonfloient & que je pouvois, sans y employer beaucoup de force, les allonger considérablement, & que je ne pouvois pas le faire lorsqu'elles étoient seches. *Dalencé*, dans son Traité des barometres &c. dit que les cordes de boyau s'allongent lorsqu'on les mouille; *Wolf*, *Sturm* & plusieurs autres prétendent qu'elles se raccourcissent. Quoi qu'il en soit, l'expérience est facile à faire pour quiconque veut entrer là-dessus dans quelque recherche. Je n'ai pas fait usage de l'allongement des cordes pour mes hygrometres, mais bien de la qualité que les cordes ont de se tordre en avant & en arriere suivant que l'humidité de l'air varie. Elles s'entortillent lorsque l'air est plus sec, & elles se détortillent quand il est plus humide, & la corde n'a pas besoin d'être fort longue pour que ce changement soit sensible. La longueur de 2 ou 3 pouces suffit, au lieu que pour la variation de longueur elle doit être de plusieurs pieds. Voici maintenant, comment mes hygrometres sont faits.

§. 28. A est un cercle de carton appuyé sur trois pieds faits de fil de fer. AB est un fil de fer, tourné en forme de vis, qui porte le cercle FG fait de papier de carte, divisé en heures & minutes ou en degrés & troué au centre C. Par ce trou passe la corde de boyau (Planche III. Fig. 12.)

boyau AB, affermie en A avec de la cire d'Espagne, & portant l'*index* ou l'aiguille DE, qui est faite de bois léger. On voit que la vis sert également pour laisser à l'air un accès libre à la corde & pour la soutenir dans une direction droite & verticale. L'usage des pieds de fil d'archal paroîtra dans la description des expériences. J'ai employé trois hygrometres faits sur le pied que je viens de dire, & trois autres où la corde passe par une caisse parallélipipede, ouverte par en bas, comme si c'étoit l'axe d'une aiguille d'horloge. Aussi dans ces trois derniers le cercle est divisé en heures comme dans les horloges, & les heures sont subdivisées de 5 en 5 minutes. La façon dont les cordes sont tordues fait que, dans le tems sec, l'aiguille tourne suivant l'ordre des heures, au lieu que dans le tems humide elle tourne en sens contraire. Les trois premiers hygrometres sont divisés en degrés, mais en sens contraire, de sorte qu'ils indiquent en croissant les degrés de l'humidité ou son accroissement. Les cordes sont de boyau, mais de différente grosseur. Je désignerai, pour éviter toute confusion, les trois hygrometres faits en forme d'horloge par les lettres A, B, C; & les trois autres faits de la façon décrite dans la 12me Figure par les lettres D, E, F. Les hygrometres B, D, E sont faits d'une corde plus grosse, & les hygrometres A, C, F d'une corde plus mince. Or il s'agissoit d'en connoître les diametres. Je m'y pris de trois façons différentes. D'abord je coupai de la corde mince la longueur de 3 pieds ou 36 pouces, mesure de Paris, & j'en trouvai le poids de $9\frac{1}{2}$ grains, poids de Berlin. Je coupai pareillement 18 pouces de la grosse corde, & j'en trouvai le poids de 12 grains, ce qui pour 36 pouces donne 24 grains. Supposant donc la gravité spécifique des deux cordes égale, il s'ensuit que les quarrés des diametres sont comme 2 à 5, ce qui donne les diametres comme 11 à 7, ou plus exactement comme 19 à 12. Ensuite je les mesurai moyennant une loupe & une des échelles de verre faites par Mr. *Brander*, célebre Méchanicien à Augsbourg. Sur cette échelle la ligne du pied de Paris se trouve divisée en dix parties avec une délicatesse & une exactitude surprenantes. Moyennant cela je trouvai le diametre de la grosse corde de

de $\frac{6}{10}$ lignes exactement, & celui de la mince de $\frac{38}{100}$ lignes. Le rapport est $=$ 30: 19 $=$ 19: $12\frac{1}{30}$, ce qui ne differe presque point du tout du premier rapport. Enfin je pris un cheveu dont l'épaisseur étoit à peine $\frac{1}{30}$ de ligne, de la longueur de $13\frac{1}{2}$ pouces, & je vis que ce cheveu tourné autour de la grosse corde avoit la longueur de 85 circonférences, mais tourné autour de la petite corde, il avoit la longueur de 135 circonférences. Ce rapport est $=$ 27: 17 $=$ 19: $11\frac{25}{27}$, & partant encore très peu différent du premier, qui tient même le milieu entre les deux dernieres mesures. J'établirai donc le rapport des diametres comme 19 à 12. La derniere mesure donne encore le diametre de la grosse corde $=$ 0,607 lignes & celui de la mince $=$ 0,383, ce qui ne differe que d'une $\frac{1}{90}$ & d'une $\frac{1}{124}$ partie de la mesure faite moyennant l'échelle & la loupe, de sorte que la grosse corde peut être considérée comme ayant un diametre de $\frac{6}{10}$ de ligne, & la mince de $\frac{38}{100}$. Enfin il reste encore à indiquer la longueur des cordes employées dans les six hygrometres, & nommément la longueur de la partie exposée à l'air. Car on conçoit bien que, pour affermir la corde en A & en H avec de la cire d'Espagne, il falloit la ficher en A dans le carton & en H dans le bois de l'aiguille, & que la partie qui entroit dans le carton & dans l'aiguille avec de la cire d'Espagne fondue, ne pouvoit plus produire aucun effet rélativement à l'humidité. Voici les longueurs en lignes du pied de Paris.

Hygrometre	longueur	corde	construction
A - - - -	12''' - - -	mince	en forme d'horloge
B - - - -	14 - - -	grosse	
C - - - -	23 - - -	grosse	
D - - - -	18 - - -	mince	dans la forme de la 12me Figure
E - - - -	18 - - -	grosse	
F - - - -	$33\frac{1}{2}$ - - -	mince	

Voilà donc ce qu'il falloit dire d'avance, afin d'être ensuite & plus clair & plus bref. Considérons maintenant un peu les cordes & leur structure.

§. 29.

Planche II. Fig. 13.

§. 29. On sait qu'on les fait de boyaux vuidés & lavés. Les boyaux, enflés d'air, forment des cylindres qui se tournent en spirales; & non enflés, on peut les applatir en sorte qu'ils forment une longue bande, dont les bords sont paralleles. C'est dans cette position que ces boyaux bien mouillés doivent être tordus pour former des cordes bien faites. Mais en les tordant les bandes commencent à se plier longitudinalement, & cela aide à remplir le creux qui resteroit au milieu de la corde, comme cela arrive lorsqu'on enveloppe un fil de fer cylindrique avec une bande de papier en forme de vis sans fin, ce qui est faisable sans que le papier prenne des plis. J'ai dessiné dans la 13me Figure une corde en profil. On y voit l'axe AB marqué par une ligne ponctuée. On y voit encore les jointures des bords de la bande & les filamens longitudinaux plus comprimés que les autres. Ces jointures peintes en profil représentent une ligne courbe, qui est celle des sinus, ainsi appellée par *Leibnitz*, parce qu'en prenant sur l'axe les arcs, les ordonnées représentent les sinus répondans. Dans mes cordes ces courbes ainsi projettées coupent l'axe sous un angle de 45 degrés. J'ignore s'il en est de même dans toutes les cordes; car cela dépend du plus ou moins de tours qu'on donne à la roue pour les tordre. Les cordes de chanvre ou de lin different à cet égard considérablement, surtout celles qui sont faites de deux ou trois fils tordus séparément. L'angle constant de 45 degrés fait que lorsqu'on conçoit la surface de la corde étendue en plan, les jointures représentent des lignes droites FG, EH. Et le point G étant la continuation de E, la droite EG est perpendiculaire à HG & = HG. Cela a lieu lorsque la corde est faite d'un seul boyau. Mais, comme pour des cordes plus grosses on emploie plus d'un boyau, alors le nombre des jointures se double, en sorte qu'entre HE, GF, il y en a encore une, deux, trois &c. autres. Or, comme dans le cas d'un seul boyau, GI marque la largeur du boyau, on voit aisément combien les fibres longitudinales ont dû être resserrées, pour être réduites à une si petite largeur. Ce cas existe dans la corde mince de mes hygrometres; elle n'est faite que d'un boyau. Le diametre de cette corde étant = 0,6 lignes, on en trouve

trouve la circonférence EG $= \frac{13,2}{7}$ lignes, ce qui donne GI $= \frac{13,2}{7} . \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ lignes. Il est clair que la largeur du boyau a été plusieurs fois plus grande. Il est clair aussi que, pour resserrer les fibres longitudinales, elles ont dû être considérablement allongées. Mais, quoi qu'il en soit, la longueur qu'elles ont obtenue, est la somme de toutes les droites GF, HE, dont chacune pour la corde mince est de $\frac{8}{3}$ lignes.

§. 30. Or on sait que la corde gonfle à mesure qu'on la mouille davantage. Il est clair aussi que, si cela arrivoit également en tout sens, la corde ne tourneroit pas. Mais, comme elle tourne en se détortillant, il faut que les fibres gonflent davantage en largeur qu'elles ne gonflent en longueur, c'est à dire, davantage suivant la direction GI que suivant la direction GF. Nous pouvons même supposer que ce dernier effet est imperceptible en comparaison du premier. Et comme par l'humidité le diametre de la corde augmente, & que l'angle EHG reste très sensiblement le même, il est clair que c'est tout comme si on tournoit un même fil en forme de vis autour d'un cylindre plus grand. Le nombre des tours qu'on lui fera faire sera en raison réciproque des diametres. Or, comme pour la corde mince nous venons de trouver EG $= \frac{13,2}{7}$ lignes $=$ HI, il est clair que pour 70 tours il y faut une corde de 132 lignes ou 11 pouces de longueur. L'Hygrometre A n'ayant que 12 lignes de longueur, il n'a non plus que $6\frac{4}{11}$ tours. Mais du tems le plus humide au tems le plus sec je l'ai vu faire $\frac{3}{4}$ tour, ce qui étant la $\frac{2}{17}$ partie des $6\frac{4}{11}$ tours, il s'ensuit que l'augmentation du diametre peut aller depuis 15 à 17, ce qui veut dire depuis 0,383 à 0,434 lignes. En mouillant la corde mince, j'en vis grossir le diametre jusqu'à 0,5 lignes.

 §. 31.

§. 31. Si d'une même corde on fait des hygrometres de différentes longueurs, alors les variations de ces hygrometres répondantes à une même variation de l'humidité, sont en raison des longueurs des cordes. Car, comme chaque tour GF, HE &c. y contribue également, il est clair que les variations seront en raison du nombre de ces tours. Mais le nombre de ces tours est en raison de la longueur de la corde. Donc &c.

§. 32. La vîtesse avec laquelle les aiguilles tournent, croît également en raison de la longueur des cordes; car cette vîtesse est la somme des vîtesses qui sont dues à chaque tour GF, HE &c.

§. 33. Si les cordes ne sont pas de la même grosseur, quoique de la même longueur, les variations des hygrometres seront en raison réciproque des diametres; car les tours seront également en raison réciproque des diametres.

§. 34. Dans le même cas, les vîtesses des variations seront également en raison réciproque des diametres; car l'humidité n'entre que par les surfaces des cordes, tandis qu'elle doit se distribuer par tout leur volume. Donc la vîtesse avec laquelle cela se fait est en raison des surfaces divisées par le volume, & partant en raison des diametres divisés par les quarrés des diametres, c'est à dire, en raison réciproque des diametres. Delà il suit que les tems dans lesquels les aiguilles parcourent un même nombre de degrés, sont en raison réciproque des diametres. Il convient d'observer qu'en tout cela on suppose des cordes d'une même structure & qualité, quoique différentes en grosseur.

§. 35. Ces propositions méritent bien d'être examinées par des expériences. Il s'agit d'abord de voir, si des hygrometres dont les cordes sont de différente longueur & grosseur, ont une marche sensiblement analogue & conforme à ce que je viens de dire. Pour
Planche II. faire voir cela comme d'un coup d'œil, j'ai dessiné dans la septieme Fi-
Fig. 7. gure la marche des trois hygrometres A, B, C, observée depuis le 22 Octobre jusqu'au 7 Novembre 1768. Les jours se trouvent mar-

qués

qués sur la ligne des abscisses, & au commencement il y a l'échelle pour les ordonnées, dont les nombres expriment les heures des cadrans, c'est à dire, des angles de 30 en 30 degrés. Les courbes A, B, C, marquent la marche des hygrometres désignés ci-dessus par les mêmes lettres. Ces hygrometres se trouvoient suspendus à un même mur à côté l'un de l'autre entre deux fenêtres qui font face au Midi, de sorte que le soleil ne pouvoit jamais y donner, & qu'ils étoient également à l'abri du vent, quoique du reste les fenêtres ne fussent ouvertes que très rarement, que la chambre ne fût point chauffée, & que personne n'y demeurât; je n'y entrois que de tems en tems pour observer ces instrumens ou pour d'autres occupations de peu de durée. Ces courbes font voir sans peine qu'elles gardent un certain parallélisme, en ce qu'elles s'approchent & s'éloignent de la ligne des abscisses en même tems & d'une façon fort semblable. J'ai choisi les observations de cette saison, parce qu'on sait qu'à l'approche de l'hyver les variations de l'humidité sont fort considérables. Aussi voit-on qu'elles furent presque journalieres en ce que ces courbes haussent & baissent considérablement. Le 28 Octobre & le 4 Novembre j'ouvris la fenêtre, afin de laisser l'entrée libre à l'humidité de l'air extérieur, qui fut alors très sensible, & surtout le 4 Novembre, ou la pluie étoit encore plus forte & la rue embourbée. Deux jours après tout cela sécha, & les hygrometres avancerent presque à vue d'œil vers les degrés extremes de sécheresse, pendant un tems fort clair. La variation fut pour l'hygrometre

	A	B	C
4 Nov. à 9 h. du soir - - -	IV: 50 - - -	IX: 30 - - -	IX: 0
7 Nov. à 4 h. du soir - - -	XII: 25 - - -	I: 42 - - -	III: 25
Donc la variation - - - - -	V: 35 - - -	IV: 12 - - -	VI: 25
Ce qui fait en degrés - - -	$167\frac{1}{2}$ - - -	126 - - -	$192\frac{1}{2}$

§. 36. Or il eſt pour les hygrometres

	A	B	C
la longueur des cordes	12 - - - -	14 - - - -	23
le rapport des diametres	12 - - - -	19 - - - -	19
Diviſant donc la longueur par les diametres, il ſera	1,00 - - -	0,74 - - -	1,21

§. 37. Ces nombres doivent, du moins à très peu près, être en raiſon des variations obſervées - - - $167\frac{1}{2}$ - - - 126 - - - $192\frac{1}{2}$. Or il eſt

$$167\tfrac{1}{2}: 100 = 126: 75\tfrac{1}{4}$$

ce qui s'accorde aſſez bien avec 0,74.
Enſuite il eſt

$$167\tfrac{1}{2}: 100 = 192\tfrac{1}{2}: 115,$$

ce qui differe davantage de 121. La différence, quoiqu'encore aſſez petite, peut très bien provenir de la différente poſition des inſtrumens & ſurtout de la différente vîteſſe avec laquelle les aiguilles tournoient. Car il eſt très poſſible que l'air extérieur ait changé d'humidité, avant que l'hygrometre ait pu ſe tourner conformément à celle qu'il avoit. Il ſe peut auſſi que quoique j'aye obſervé les hygrometres plus d'une fois par jour, je n'aye pas attrapé le moment où chacun d'eux étoit le plus avancé ou le plus reculé. Mais cette derniere circonſtance ſe compenſe en prenant la ſomme des variations principales, qui eſt pour l'hygrometre

	A	B	C
de degrés	668 - - -	517 - - -	752

§. 38. Ces nombres ſont

en raiſon de	1,00 - - -	0,77 - - -	1,13
au lieu de - -	1,00 - - -	0,74 - - -	1,21.

Il ſemble donc qu'il y avoit quelque petite différence dans les cordes. Cependant ces obſervations confirment ſuffiſamment, & même plus que je ne l'ai prétendu, qu'en effet la groſſeur des cordes les rend moins

moins ſenſibles. Car la corde B eſt de deux lignes plus longue que la corde A, & néanmoins elle varie beaucoup moins. Les variations des cordes A, C, ſont presque égales; cependant la corde C eſt presque deux fois plus longue que la corde A.

§. 39. Du reſte la correſpondance de ces hygrometres reſte aſſez ſenſible. C'eſt ainſi p. ex. que le 17 Novembre ils indiquoient

A	B	C
X: o	XII: o	I: o

& je les retrouvai ſur ces degrés le 19, 20, 22 Nov. le 3, 4, 11, 24 Dec. le 1, 3, 10, 23 Janv.

§. 40. Il reſtoit encore à ſoumettre mes hygrometres à d'autres examens, qui devoient aboutir à en faire connoître le langage & les loix de leurs variations. On voit bien qu'il étoit queſtion d'un ſec abſolu & d'une humidité abſolue, ou du moins connoiſſables. Quant au ſec abſolu, il eſt clair qu'on le trouve ſous la cloche d'une machine pneumatique en vuidant l'air & même à repriſe. La queſtion étoit, ſi en mettant l'hygrometre, même mouillé de propos délibéré, ſous la cloche, l'évacuation de l'air y produiroit quelque effet ſenſible. Mais, d'après les expériences que Mr. Gerhard a faites là-deſſus à ma requiſition, l'hygrometre dans le vuide ceſſa de ſubir aucune variation, même pendant pluſieurs jours, de ſorte qu'il n'y avoit rien à trouver par ce moyen-là. Et comme il ne convenoit pas d'expoſer l'hygrometre à côté d'un feu ou de la braiſe, parce que la corde y eût ſouffert des changemens trop violens & probablement auſſi des effets de la grande chaleur, il valoit mieux ſe déſiſter de l'expérience.

§. 41. Je pris donc le verre N°. 3. (§. 7.) & y ayant verſé de l'eau à la hauteur d'environ ½ pouce, j'y plaçai l'hygrometre D. Je couvris tout de ſuite le verre avec un verre plan du même diametre, & je bouchai les jointures avec de la cire molle, afin d'empêcher toute communication avec l'air extérieur. Ce procédé ſe fonde ſur ce que je ſavois par d'autres obſervations faites incidemment, que l'eau continue de s'évaporer lors même qu'elle ſe trouve enfermée

dans quelque bouteille bien bouchée. Je le savois encore par ce qu'ayant un jour fait un thermometre à eau, la surface de l'eau dans le tuyau baissa peu à peu, & qu'au haut du tuyau, quoique fermé hermétiquement, il s'attacha de petites gouttes d'eau qui grossirent peu à peu. Aussi le succès répondit à l'attente, en ce que l'hygrometre commença à tourner visiblement vers les degrés d'humidité, & même dès le premier instant, de sorte qu'on peut en inférer que dès le premier instant l'air dans le verre se chargea de vapeurs. Cette expérience fut faite le 7 Novembre 1768, à commencer du matin à 8 heures 23 minutes, peu de tems après que le feu eut été mis au fourneau. Le thermometre varia jusqu'après midi de 11 à 14 degrés au dessus du tempéré. Voici maintenant la marche de l'hygrometre comparée avec le tems exprimé en minutes.

tems minutes	Hygrom. degrés	tems minutes	Hygrom. degrés
0	0	212	269
7	10	225	288
10	15	288	323
16	28	315	335
21	42	435	385
28	60	497	412
38	87	585	452
45	104	645	462
60	132	705	476
75	155	798	495
90	176	855	502
105	194	1440	540
138	226		

On voit par cette table que, généralement parlant, le mouvement de l'hygrometre se rallentit. Car en 1440 minutes ou 24 heures il parvint à peine au double de ce qu'il étoit en 212 minutes ou $3\frac{1}{2}$ heures. Mais le commencement de sa marche a d'abord été accéléré, comme on le voit dans la neuvieme Figure, que j'ai construite pour la premie-

re

re demi-heure. L'abſciſſe AB y eſt diviſée en minutes, & les ordonnées ſont priſes ſur l'échelle BD. On voit que la courbe AC tourne d'abord ſa convexité vers AB, mais qu'elle s'approche bien vîte de ſon point d'inflexion contraire. Elle doit avoir AB pour tangente en A, parce que, quelque vîte que l'air ſe charge de vapeurs, cela commence par zéro, & que par là l'hygrometre doit d'abord tourner infiniment peu. Mais la Figure fait voir que la courbure en A change avec une extrême vîteſſe, & que l'air dès la premiere minute doit déjà être conſidérablement chargé de vapeurs.

§. 42. Je répétai cette expérience avec le même verre & le même hygrometre le 10, & le 13 Nov. je la fis avec l'hygrometre E, afin de comparer la vîteſſe de leur marche. Voici d'abord l'obſervation faite avec l'hygrometre D; elle commença le 10 Nov. à 7 heures 40 min. du matin, pendant qu'on chauffoit la chambre, l'hygrometre étant ſur 41 degrés.

tems minut.	Hygr. D degrés	tems minut.	Hygr. D degrés	tems minut.	Hygr. D degrés
0	0	20	40	155	199
1	1	25	51	180	209
2	2½	30	61	225	233
3	4½	35	72	253	247
4	6	40	82	275	259
5	8½	43	86	300	270
6	10½	45	92	325	277
7	12	58	115	370	92
8	14	60	119	395	304
9	16	75	142	580	395
10	17½	85	156	640	400
11	21	95	166	735	415
12	22½	115	182	750	423
13		120	185	805	441
14	26	130	191	880	457
15	28	135	193	915	461
18	36	145	197	1460	506

On

On voit donc qu'ici la marche de l'hygrometre fut plus lente d'environ une $\frac{1}{14}$ ou $\frac{1}{13}$ partie, ce qu'il faut attribuer à la chaleur, qui peut avoir été ici un peu plus grande. Car j'ai remarqué encore dans d'autres expériences, que la chaleur diminue l'huméfaction de l'hygrometre.

§. 43. Voici maintenant l'expérience faite avec l'hygrometre E. Elle commença le 13 Novembre à 8 heures 25 minutes du matin.

tems minut.	Hygr. E degrés	tems minut.	Hygr. E degrés	tems minut.	Hygr. E degrés
0	0	44	58	250	179
1	½	50	66	290	191
2	2	55	70	325	204
3	4	62	80	355	216
4	6	67	86	380	227
5	8	71	95	450	252
8	12	80	98	465	257
9	13	85	102	485	264
14	18	95	111	515	275
55	20	105	118	540	279
17	22	115	123	610	299
21	28	130	130	685	316
27	33	155	143	720	328
29	37	170	148	1135	396
31	39	180	153	1395	435
35	46	195	158		
40	52	220	167		

On voit donc qu'ici la marche étoit plus lente que celle de l'hygrometre D dans l'observation précédente.

§. 44.

§. 44. Mais, pour comparer plus aisément ces deux expériences, je les ai construites dans la huitieme Figure. La ligne des abscisses est divisée en heures, & l'ordonnée AC en degrés. La courbe AD marque la marche de l'hygrometre D, & la courbe AB celle de l'hygrometre E. Les droites GFE sont paralleles à AB, & les parties GF, GE, sont en raison du tems que les hygrometres employoient pour parcourir un nombre égal de degrés. J'y ai marqué ces rapports. On voit qu'ils ne different presque en rien, & qu'on peut établir qu'ils étoient comme 100 à 57. Or, les hygrometres D, E étant de même longueur (§. 28.), le théoreme veut que ce rapport soit en raison réciproque des diametres (§. 34.) & partant en raison de 19 à 12 (§. 28). Or il est Fig. 8.

$$100 : 57 = 19 : 10,8$$

ce qui est moins que 12 d'une 15me partie. Mais, en comparant la table du §. 43. avec celle du §. 41, où la marche de l'hygrometre D étoit plus vîte d'une $\frac{1}{14}$ partie, le rapport se trouve être exact. J'ai déjà observé que ces petites différences viennent de ce que la chambre n'étoit pas également chauffée. Les expériences que je rapporterai ci-après feront voir plus évidemment, que la chaleur diminue assez considérablement l'humidité, soit qu'elle aide à sécher la corde de l'hygrometre, soit qu'elle fasse aller les vapeurs vers la surface du verre. Ce qui est très visible, c'est qu'après un intervalle d'environ huit heures, surtout lorsque l'air de la chambre commence à se refroidir, on voit d'assez grosses gouttes d'eau s'attacher tant aux côtés du verre qu'au couvercle. Cela forme une espece de distillation assez lente, dont peut-être on pourroit tirer parti dans la Chymie; elle a l'avantage de ne point être violente, parce que la simple variation de la chaleur de la chambre la produit.

§. 45. J'ai répété la même expérience avec l'hygrometre D le 8 Novembre, en commençant à 3 heures 47 minutes après midi,

 l'hy-

l'hygrometre étant sur 36 degrés. La marche de l'aiguille fut comme suit.

tems minutes	hygr. D degrés	tems minutes	hygr. D degrés
0	0	217	244
9	19	253	267
23	46	319	298
36	71	344	309
50	98	373	322
63	120	395	332
76	136	914	482
91	153	974	484
129	187	1100	489
151	205	1215	490
189	227		

Comme la chambre ne fut chauffée que le matin, & qu'elle se refroidit depuis l'après-midi, cela devoit accélérer d'abord la marche de l'hygrometre. Mais, comme l'observation dura jusqu'au midi du lendemain, on voit aussi que l'échauffement de la chambre en rallentit la marche dans les quatre dernieres observations.

§. 46. J'avois fait ces expériences afin d'observer l'hygrometre dans un air aussi rempli de vapeurs qu'il pouvoit l'être, & il faut bien qu'il l'ait été, puis que les vapeurs commençoient à s'attacher au verre. Il étoit donc question de voir, si dans un tems p. ex. de 24 heures, le même hygrometre parcourroit un même nombre de degrés. Ces observations font voir que cela arrive à une $\frac{1}{15}$ partie près.

§. 47. Il restoit encore à voir jusqu'où l'hygrometre tournevoit en le laissant dans le verre plusieurs jours de suite. C'est ce que je fis le 19 Janvier 1769, avec le même hygrometre D, qui se trouva

alors

alors sur 310 degrés, de sorte que l'air de la chambre fut encore plus sec que dans les expériences des §. 42. & 45. L'observation commença à 9 heures 16 min. du matin, l'hygrometre étant sur 310 degrés. La marche fut comme suit.

tems minutes	hygr. D degrés	tems minutes	hygr. D degrés	tems minutes	hygr. D degrés
0	0	1484	502 *	3682	737
9	19	1588	500	4209	755
32	56	1766	501	4452	763
49	96	1876	521	4639	766
166	205	2016	532	4912	780
220	228	2146	561	5328	792
324	270	2203	605	5784	800
514	352	2251	620	6064	812
560	364	2789	710	6499	820
589	371	2969	722 *	6641	822
656	384	3044	722	7100	840
816	410	3199	727		
1366	485	3504	734		

On voit qu'encore dans cette expérience l'hygrometre tournoit d'environ 500 degrés en 24 heures. Et comme, les jours suivans, l'humidité y avoit moins de prise, la variation de la chaleur s'y rendit encore plus sensible; car ordinairement, depuis les 9 ou 10 heures jusques vers le midi, l'hygrometre ne varioit plus, ou il rétrogradoit même, comme cela se voit dans la table où j'ai marqué un *. La marche du second jour ne fut plus que d'environ 200 degrés, & le troisieme jour elle se réduisit à 45, comme encore les jours suivans. Il semble qu'il y ait là quelque chose d'asymptotique.

§. 48. Le 24 Janvier, à 8½ heures du matin, j'ouvris le verre pour remettre l'hygrometre à l'air. La corde se trouva si mouillée

 qu'elle

qu'elle avoit perdu presque toute son élasticité. Je la mesurai moyennant la loupe & l'échelle de verre de Mr. *Brander* (§. 28.), & j'en trouvai le diametre tant soit peu plus grand que 0, 5 lignes. Son diametre à l'air étant de 0, 38 lignes, on voit qu'elle étoit fort gonflée. Cela convient assez bien avec le nombre de degrés qu'elle a parcourus. Car, comme dans la corde mince il faut 132 lignes pour 70 tours (§. 29.), & que la corde de l'hygrometre est de 18 lignes (§. 28.), nous aurons

$$132 : 70 = 18 : 9\tfrac{6}{11}.$$

Ainsi la corde dans l'air sec a $9\frac{6}{11}$ tours, ce qui étant multiplié par 360, donne 3436 degrés. Or de ces 3436 degrés il faut soustraire les 840 degrés dont elle s'est détortillée dans le verre, & il reste 2596 degrés, ou $7\frac{8}{9}$ tours, qu'elle avoit encore dans son dernier état d'humidité. Mais le gonflement étant en raison réciproque du nombre de tours ou de degrés (§. 30.), nous aurons

$$2596 : 3436 = 0,38 : 0,5003;$$

donc le diametre de la corde étoit gonflé jusqu'à être de 0, 5 lignes, comme l'observation le donne.

§. 49. Mais, pour voir un peu mieux la marche de l'hygrometre dans cette expérience, j'ai dessiné d'après les nombres de la table du §. 47. la quatorzieme Figure. La ligne des abscisses AB y est divisée en jours & en minutes, & l'ordonnée AC en degrés. Sur ces échelles est construite la courbe ADFG, pointée depuis H, où elle commence à avoir des inflexions anomales, qui proviennent de la variation de la chaleur. Elle doit bien en avoir encore une entre AH vers le midi du premier jour, mais cette inflexion est moins sensible, tant parce que ce jour la grande vitesse du mouvement de l'aiguille le rend moins perceptible, que parce que l'air n'étoit point encore si chargé de vapeurs que le jour suivant. J'ai remarqué que, nonobstant ces inflexions anomales, on pouvoit tirer la courbe AHEFG, en sorte que sa courbure fût très uniforme

Planche III. Fig. 14.

me & exemte de ces inflexions en ſens contraire; & il n'eſt pas douteux que cette courbe ne repréſente la marche de l'aiguille pour le cas où on ſuppoſe la chaleur conſtante. De la façon qu'elle eſt deſſinée dans la Figure, elle paroit avoir l'ordonnée AC pour tangente initiale. Mais cela n'eſt pas; car j'ai fait voir ci-deſſus (§. 41.) que ſa tangente initiale eſt la droite AB, & qu'il y a tout près du commencement A un point d'inflexion contraire, qui fait que cette courbe, après avoir d'abord tourné vers AB ſa convexité, oppoſe enſuite à cette droite ſa concavité.

§. 50. Ces ſymptomes viennent des deux cauſes qui produiſent le mouvement de l'aiguille de l'hygrometre. La premiere de ces cauſes eſt l'évaporation. Cette cauſe agit ſi promptement que, dès la premiere minute, l'air dans le verre eſt déjà très chargé de vapeurs (§. 41.). Or, ſi cela arrivoit dès le premier inſtant, la courbe AEFG tourneroit partout ſa concavité vers AB, parce qu'alors il n'y auroit que la ſeconde cauſe qui eſt l'huméfaction de la corde. Cette cauſe agit beaucoup plus lentement & d'une façon purement rélative, puiſqu'elle eſt comme une fonction de la différence entre l'humidité de l'air & celle de la corde. Car on conçoit que, ſi l'une & l'autre eſt égale, l'hygrometre ne ſubira plus de variation, puiſqu'alors la différence eſt = 0. A cette cauſe il s'en joint encore une autre, c'eſt que l'évaporation diminue à meſure que l'air eſt déjà rempli de vapeurs. Nous verrons dans la ſuite que cette cauſe influe extremement ſur la courbure de la courbe AEG. Car, ayant remis l'hygrometre à l'air, qui garda ſenſiblement un même degré de ſéchereſſe, je vis qu'en moins de 4 heures la corde ſe retrouvoit dans l'état où elle avoit été avant l'expérience, tandisque dans le verre elle avoit mis cinq jours pour acquérir le degré d'humidité qu'elle a acquiſe.

§. 51. Il convenoit encore de changer de verre. C'eſt ce que je fis le 25 Janvier 1769. Je verſai un peu d'eau dans le verre N°. 2. (§. 4). J'y plaçai l'hygrometre D; l'ayant couvert & en ayant bien bouché les jointures, j'obſervai la marche de l'hygrometre, à com-

mencer depuis les 9 heures 33 minutes du matin, l'hygrometre étant alors sur le 194me degré, & par conséquent fort sec.

tems min.	hygr. D degrés	tems minut.	hygr. D degrés	tems minutes	hygr. D degrés
0	0	115	171	324	260
2	5	120	175	362	269
4	11	133	181	374	270
6	15	141	185	420	278
7	17	162	193	490	292
12	31	173	198	547	301
20	50	187	203	587	308
27	68	203	210	660	311
32	79	224	218	867	338
37	88	238	224	1320	382
43	100	246	226	1380	386
47	106	256	231	1620	369
52	115 *	273	236	2100	388
66	133	289	244	2760	402
92	156	304	254		
99	162	319	259		

Comme dans cette expérience l'hygrometre avoit été de 116 degrés plus sec que dans l'expérience précédente, il n'est pas étonnant que sa marche fût d'abord plus accélérée; aussi est-ce à la 52me minute qu'il faut commencer, si on veut comparer cette table avec la précédente, & depuis là la marche a été beaucoup plus lente. Car, depuis la 52me minute jusqu'à la 1380, l'aiguille n'avança que de 115 jusqu'à 386 degrés, ce qui en 1328 minutes ne fait que 271 degrés, au lieu que dans l'expérience précédente elle parcourut dans un même tems jusqu'à 482 degrés. Ces nombres 482 & 271 sont à très peu près en raison réciproque du volume d'air renfermé dans les verres N°. 2, & N°. 3, employés dans ces expériences. C'est aussi ce qui doit être. Car la surface de

de l'eau dans les deux verres ayant été à très peu près égale, il devoit s'évaporer une même quantité d'eau en un même tems. Mais dans le verre N°. 2. cette quantité d'eau se distribuoit dans un plus grand volume d'air, que dans le verre N°. 3. Ainsi l'humidité devoit être en raison réciproque des volumes d'air, & partant (§. 7.) en raison de $24\frac{1}{2}$ à $14\frac{1}{2}$, ou de 49 à 29. Cette marche presque deux fois plus lente fit aussi que la chaleur y produisit un effet encore plus sensible, en ce que le second jour vers le midi l'aiguille rétrograda de 26 degrés.

§. 52. Voyons maintenant de quelle maniere l'aiguille rebroussa chemin, lorsque je remis l'hygrometre à l'air pour laisser sécher la corde, ou pour la laisser se remettre dans son état naturel ou conforme à l'état de l'air libre. C'est ce que je fis le 9 Nov. 1768, d'abord après avoir retiré l'hygrometre D du verre après l'expérience rapportée au §. 45. L'aiguille se trouva sur le degré 172, à 34 minutes après midi. Sa marche rétrograde fut comme suit.

tems min.	hygr. D degrés	tems min.	hygr. D degrés	tems minut.	hygr. D degrés
0	0	34	270	93	433
6	33	36	295	111	455
8	51	40	307	126	466
10	70	41	312	141	473
11	76	43	320	150	475
15	109	45	329	180	478
16	120	48	340	210	478
18	137	50	347	256	479
19	148	52	353	300	483
21	169	55	362	314	486
25	205	58	370	362	489
27	212	60	376	408	491
28	229	65	390	451	493
30	243	71	403	556	494
31	250	81	421	680	495

De

De cette maniere l'hygrometre retourna, à 5 degrés près, dans l'état où il avoit été le 8 Novembre avant que je l'eusse mis dans le verre. J'ai dessiné sa marche dans la dixieme Figure, en employant les mêmes échelles que dans la huitieme (§. 44.). De cette maniere on voit d'un coup d'œil combien il séchoit plus vîte dans l'air, qu'il ne devenoit humide dans le verre, où sa marche suivoit la courbe AFD (Fig. 8.) tandis qu'en séchant, sa marche fut ABD (Fig. 10.) bien plus précipitée. Ce n'est pas que la corde seche plus facilement qu'elle ne s'humecte à circonstances égales. Mais les circonstances n'étoient point égales, puisque dans le verre l'air n'acquit son dernier degré d'humidité que peu à peu. Or, quoique la courbe ABD paroisse avoir deux asymptotes & qu'elle n'offre point d'inflexion en sens contraire, il faut néanmoins observer que c'est uniquement parce que la corde n'avoit pas été assez humide. C'est ce que d'autres expériences m'ont fait voir.

Planche II. Fig. 10.

§. 53. Car ayant, après l'expérience du 10 Novembre (§. 42.) laissé l'hygrometre dans le verre jusqu'au 13 Novembre, je vis qu'il avoit fait depuis le 41 degré deux tours entiers jusqu'au 29 degré. Je le mis donc à l'air pour en observer la marche rétrograde, qui fut comme suit, à commencer depuis les 8 h. 15 m. du matin du 13 Novembre.

tems

tems minut.	hygr. D degrés	tems minut.	hygr. D degrés	tems minut.	hygr. D degrés
0	0	24	133	95	599
1	1	25	145	105	629
2	2	26	162	115	649
3	3	27	168	140	682
4	4	31	207	165	699
5	6	37	251	180	706
6	14	39	267	190	711
7	18	40	278	205	713
8	26	41	289	230	716
9	34	46	339	260	719
11	49	50	373	300	721
12	58	54	407	335	723
13	65	60	442	365	724
14	68	65	470	390	726
15	73	72	508	460	727
18	81	77	531	525	727
20	95	86	569		
21	99	90	584		

En comparant cette table avec la précédente, on voit que la marche initiale avoit été ici beaucoup plus lente, & que ce n'eſt qu'après 47 minutes qu'elle commença à devancer. Il paroit donc que la corde a beſoin de ſécher juſqu'à un certain point, avant qu'elle puiſſe acquérir le degré d'élaſticité requis pour ſe tordre avec la plus grande vîteſſe. Et comme enſuite, à meſure qu'elle ſeche davantage, ſon mouvement ſe rallentit, on voit bien qu'il faut plus de force pour qu'elle ſe torde davantage, puisqu'à meſure qu'elle devient plus ſeche elle ſe remet dans l'état de compreſſion que le cordier lui avoit donné en la tordant.

§. 54. J'observai encore la même chose le 24 Janvier 1769, en retirant l'hygrometre du verre où je l'avois laissé pendant les cinq jours précédens (§. 47.). Mais je ne pus continuer l'observation pour des affaires qui me survinrent. Ainsi je rapporterai simplement ce que le tems me permit d'observer. Ce fut à 8½ heures que je retirai l'hygrometre du verre, l'aiguille se trouvant sur 140 degrés, après environ 2⅓ tours qu'elle avoit faits dans le verre. Sa marche rétrograde fut comme suit.

tems minutes	hygr. D degrés	tems minutes	hygr. D degrés	tems minutes	hygr. D degrés
0	0	60	218	112	497
9	7	65	232	115	504
10	8	70	250	125	540
15	21	75	275	—	—
37	58	85	340	232	1014
41	72	90	387	265	1014
45	90	102	450	285	1020
53	144	105	460	430	1020

Comme dans cette expérience la corde avoit été encore plus imprégnée d'humidité, la marche initiale de l'aiguille en étoit aussi plus lente, quoiqu'elle eût séché dans un air plus sec de plus de 100 degrés. Mais aussi elle redoubla ensuite de vîtesse, & je fus surpris, après une absence d'environ 2 heures, de voir qu'elle avoit fait un chemin de 474 degrés, & qu'elle se trouvoit entierement remise dans l'état qui répondoit au degré de sécheresse de l'air.

§. 55. Je rapporterai encore l'expérience faite avec l'hygrometre E, que je retirai du verre le 14 Novembre (§. 43.) après midi à 1 h. 15 minutes, tandis qu'il se trouvoit sur 39 degrés. La marche rétrograde de l'aiguille fut comme suit.

tems minutes	hygr. E degrés	tems minutes	hygr. E degrés	tems minutes	hygr. E degrés
0	0	50	209	110	363
1	0	55	230	115	369
2	1	60	245	125	378
5	6	65	261	135	386
10	26	75	280	165	400
15	59	80	302	185	405
20	76	85	317	215	414
25	103	90	326	240	426
30	128	95	338	285	429
35	151	100	347	390	437
45	193	105	355	—	—

Ici donc la marche initiale étoit encore fort lente, comme généralement toute la marche de l'aiguille. La raiſon en eſt aſſez naturelle. Car, outre que la corde de l'hygrometre étoit plus groſſe, il n'y avoit pas tant de degrés à parcourir. Cette derniere circonſtance fait que cette table ne peut pas ſans reſtriction être comparée à celle du §. 52, pour ce qui regarde les diametres des cordes, que nous avons vu cideſſus (§. 28.) être comme 19 à 12. C'eſt dans ce rapport que devroient être les tems employés à parcourir un même nombre de degrés. Or nous trouvons dans les 2 tables les degrés 347, parcourus en 100 minutes par l'hygrometre E, & en 50 minutes par l'hygrometre D; mais il eſt

$$19 : 12 = 100 : 63\tfrac{3}{19},$$

de ſorte que l'hygrometre D auroit dû y employer 63 minutes. Il n'y en employa que 50, parce que pour parcourir plus de degrés ſa marche en devoit être plus accélérée. Auſſi le rapport des degrés qui ſont 495 & 437, réduit ces 63 minutes à 55, ce qui differe moins de 50. Mais, comme la marche n'eſt pas tout à fait proportionelle, je n'inſiſterai pas davantage ſur cette comparaiſon.

§. 56. Tirons encore de ces obſervations la conſéquence, que lorsque l'humidité de l'air change ſubitement & beaucoup, les hygrometres marquent ce changement par un mouvement fort ſenſible, mais que ce mouvement eſt plus lent & moins perceptible, lorsque l'humidité ne change que de quelques degrés. Car on voit dans toutes ces tables (§. 52 — 55.) que les derniers degrés ſont parcourus fort lentement. De là il peut arriver que, quand les variations de l'air ſont ſubites & fréquentes, l'hygrometre ſuit le nouveau changement avant que de s'être accommodé entierement à celui qui précédoit. Voilà donc ce qui explique les petites anomalies qui ſe trouvent dans la ſeptieme Figure, & dont j'ai parlé ci-deſſus (§. 37. & ſuiv.).

§. 57. Dans les expériences de l'hygrometre placé dans le verre, il n'étoit gueres poſſible de tenir compte de l'humidité cauſée par l'évaporation de l'eau qui couvroit le fond du verre. Car, comme il faut peu d'eau pour rendre l'air très humide, on conçoit que même pendant les cinq jours que dura l'obſervation rapportée au §. 47, la ſurface de l'eau ne pouvoit baiſſer que très peu, d'autant que ſa ſurface étoit très grande. Il eſt clair qu'il falloit diminuer cette ſurface, afin d'en rendre l'évaporation plus petite. Et c'eſt ce que je fis de la façon ſuivante.

§. 58. Le 15 Novembre 1768, je pris un verre de thermometre dont la boule étoit de $10\frac{1}{3}$ lignes, la longueur du tuyau de 4 pouces $7\frac{1}{2}$ lignes, & ſon diametre intérieur de $1\frac{1}{8}$ ligne. Je le remplis d'eau jusqu'à l'ouverture du tuyau & le plaçai dans le verre N°. 1. (§. 4.), après avoir diviſé le tuyau en lignes, pour voir à travers le verre l'abaiſſement de la ſurface de l'eau. Je plaçai encore dans le verre l'hygrometre F, & je couvris le verre d'un verre plan & circulaire de même diametre, en bouchant les jointures avec de la cire amollie, afin d'empêcher toute communication de l'air dans le verre avec l'air extérieur. Ce qui étant fait, j'obſervai tant l'abaiſſement de la ſurface de l'eau dans le tube que la marche de l'hygrometre. Et comme l'eau dans le tube pouvoit s'élever & s'abaiſ-

ſer

ser tant soit peu par les variations de la chaleur, j'en observai la hauteur le matin avant qu'on mît le feu au fourneau, parce qu'alors le thermometre dans la chambre se trouvoit ordinairement entre 9 & 10 degrés, c'est à dire, au tempéré. Je dois encore avertir que, pour rendre l'effet de la chaleur insensible, j'aurois pu me borner à un simple tube de verre de la longueur de tout au plus un pouce. Car, comme l'évaporation suit la loi des surfaces (§. 9. & suiv.), il est clair qu'elle auroit été la même. Mais avec tout cela il eût été nécessaire d'observer l'abaissement de la surface de l'eau, les matins. Car comme la chaleur fait varier l'évaporation (§. 19. & suiv.), on voit que de cette maniere on observe l'effet des variations diurnes de la chaleur. J'observai encore qu'ordinairement vers le midi l'hygrometre rétrogardoit un peu, pendant que la chaleur de la chambre alloit vers son *maximum*. Mais j'ai fait voir ci-dessus (§. 49.) dans la quatorzieme Figure, que les effets de la variation de la chaleur se compensent, en sorte que le total de la marche de l'hygrometre se regle sur un degré de chaleur moyen & constant.

J.	H.M.	Hygr.	Ev.	J.	H.M.	Hygr.	Ev.	J.	H.M.	Hygr.	Ev.
15	— 9.55	251	0	18	— 8.25	304	2		+ 10.45	333	5¼
	57	249			10. 0	303		30	— 7.30	338	
	— 10. 0	246			11.30	292			+ 11.45	337	
	5	243			+ 1.35	293		1	— 7.35	341	
	10	241			4.37	298			+ 0. 5	337	
	15	239			8.20	300		2	— 8.15	347	6
									+ 0. 5	336	
	20	238		19	— 8.15	309		3	— 0.25	339	
	30	244			10.45	308			— 8.10	346	
	35	246			+ 1.30	308			+ 0.25	332	
	45	246			6.40	308			+ 10.45	338	
	55	248		20	— 8.15	317		4	— 8.10	345	
	— 11.10	248			+ 0.10	316			+ 1.30	338	
	25	251			+ 7.20	317			+ 10.20	336	
	35	253		21	— 8.30	323	3½	5	— 8.30	344	6¼
	45	254			+ 1.15	322			+ 11.20	335	
	+ 1. 5	252			+ 11.20	323		6	— 8.30	341	
	2.45	258		22	— 8.35	329			— 11.10	349	
	4.30	266			+ 2.20	324			+ 11.24	331	
	6.45	267			+ 11.35	328		7	— 8.30	338	7
	8.10	269		23	— 8.45	332			+ 10.52	327	
	8.50	271			+ 1.20	324		8	— 8.28	334	
	9.50	272			+ 10.55	327			+ 1.20	328	
16	— 7.30	285		24	— 8.10	332	4		+ 11.15	329	
	8.35	287			+ 0.55	316		9	— 8.50	337	7¼
	9.55	283			+ 10.45	332			+ 2.20	331	
	10.30	273		25	— 8.15	329			+ 10.35	332	
	+ 0.35	270			+ 2.45	323		10	+ 10. 2	330	
	1.10	268		26	— 0.25	324		11	— 8. 0	337	7¾
	1.30	268			— 7.50	334	4½	12	— 8. 0	337	
	6.15	282			+ 1.25	324			+ 3.30	334	
				27	— 0.35	328					
	10.45	284			— 8. 5	334		13	— 8.30	338	8¼
17	— 8. 0	295			+ 0.55	318					
	9.10	296			+ 11.20	328					
	11.35	294		28	— 7.20	335					
	+ 1.15	287			+ 0. 8	328					
	5.30	294			+ 10.35	332					
	11. 5	296		29	— 8.10	336					

Je dois remarquer que le 6 Déc. j'avois placé le verre dans une chambre froide, pendant quelques heures du soir, afin de voir si cela accéléreroit l'évaporation, comme en effet cela arriva un peu.

§. 59.

§. 59. Cette expérience m'apprit que je pouvois placer dans le verre un tuyau d'un plus grand diametre. C'est ce que je fis aussi le 13 Déc. à 1 h. 5 m. après-midi. Il falloit cet intervalle de tems pour remettre l'hygrometre à l'air, afin que l'aiguille pût retourner sur le degré répondant à l'humidité de l'air extérieur. Je remplis donc d'eau une espece de phiole, qui ressembloit en tout à un verre de thermometre. Le diametre de la boule étoit de $14\frac{1}{4}$, le diametre intérieur du cylindre ou du tuyau de 3 lignes exactement, & la longueur du tuyau de $37\frac{1}{2}$ lignes. Le tuyau fut rempli jusqu'en haut, & j'y avois collé une échelle divisée en lignes. Je plaçai donc cette phiole & l'hygrometre dans le même verre N°. 1. Je le couvris & bouchai les jointures avec de la cire. Voici le résultat des observations.

J.	H.M.	Hygr.	Ev.	J.	H.M.	Hygr.	Ev.	J.	H.M.	Hygr.	Ev.
13	+ 1. 5	244	0		+ 10.25	294	$2\frac{3}{4}$	31	— 8. 0	46	
	5.15	310		21	— 9. 0	317			+ 11.30	24	
	7. 0	317			+ 11. 0	320		1	— 8. 0	49	
	8. 0	323		22	— 8. 6	339			+ 10. 0	26	
	9.40	334			+ 1. 0	285		2	— 8. 0	57	
14	— 8. 0	14			+ 10. 0	338		3	— 8. 0	59	
	— 11. 0	7		23	— 9. 0	358	3		+ [illegible]. 0	26	$4\frac{1}{2}$
	+ 7.25	39			+ 6. 0	348		4	— 8. 0	71	
	+ 10. 0	46			+ 10.30	343			+ 10. 0	43	
15	— 8. 0	89		24	— 8. 0	3		5	— 8. 0	78	
	+ 2.20	54		25	— 8. 0	8			+ 10. 0	47	
	+ 10. 0	118	1		+ 0.30	289		6	— 8. 0	88	
16	— 8. 0	159			+ 10. 0	2			+ 9. 0	41	
	+ 4.10	149		26	— 8. 0	14		7	— 8. 0	96	5
17	— 0.15	172			+ 1. 0	342			+ 9.30	46	
	— 8.15	208			+ 10. 0	2		8	— 8. 0	103	
	+ 5.25	218		27	— 8. 0	24		9	— 8. 0	95	
	+ 11. 6	225			+ 8.30	8		10	— 8. 0	96	
18	— 8.35	258	2	28	— 8. 0	36		11	— 8. 0	90	
	— 11.45	193			+ 1. 0	349		12	— 8. 0	100	
	+ 10. 7	241			+ 10. 0	30		13	— 8. 0	114	
19	— 8. 0	270		29	— 8. 0	43		14	— 8. 0	120	
	+ 10.30	258			+ 1.30	3		15	— 8. 0	116	
20	— 8. 0	290			+ 9.30	24		16	— 8. 0	115	
	+ 1.45	249		30	— 7.30	50		17	— 8. 0	117	6
	+ 5.35	294			+ 9.30	22	4				

§. 60.

§. 60. On voit que, dans ces deux expériences, j'ai été plus assidu à observer l'hygrometre pendant les premiers jours, afin de voir les variations journalieres qui provenoient de celles de la chaleur, lesquelles faisoient tous les jours vers le midi rétrograder l'aiguille. On voit aussi sans peine que l'évaporation se rallentit peu à peu, à mesure que la quantité évaporée rendoit l'air plus humide. Et comme le petit tuyau évaporoit moins que le grand, vu que les bases des cylindres étoient comme 1 à 7, on voit aussi qu'il s'évaporoit plus de lignes dans la premiere expérience que dans la seconde, quoique la premiere ne durât que 28 jours tandis que la seconde en dura 35. J'ai dessiné dans la sixieme Figure la courbe d'évaporation pour la seconde expérience. La ligne des abscisses AB représente les jours, & les ordonnées 1, 2, 3, 4, 5, 6, marquent autant de lignes d'évaporation. Comme la courbe AD tourne sa concavité vers l'axe, on voit que l'évaporation devient plus lente.

Planche I. Fig. 6.

§. 61. Ces observations, & surtout celles de la derniere expérience, nous mettent en état d'évaluer le degré d'humidité que l'air dans le verre avoit de plus pour chaque ligne d'évaporation. Car le volume d'air contenu dans le verre est donné, & nous avons vu ci-dessus qu'il est de 39 pouces cubiques. Or le tuyau ayant un diametre intérieur de 3 lignes exactement, il ne s'agit que de calculer de combien de lignes cubiques est un cylindre de 3 lignes de diametre & d'une ligne de hauteur. Cela donne, en employant le rapport d'Archimede, $7\frac{1}{14}$ lignes, ou plus exactement $7\frac{2}{29}$ lignes. Mais nous pourrons, sans admettre une erreur considérable, supposer nombre rond 7 lignes; & comme la boule, le tuyau & l'hygrometre occupoient environ 1 pouce cubique d'espace, nous donnerons au volume d'air renfermé dans le verre, 38 pouces. Ce qui fait 38.1728 lignes cubiques. Divisant donc 38.1728 par 7, nous aurons 9380, de sorte que le volume d'air est 9380 fois plus grand que le cylindre de 3 lignes de diametre & d'une ligne de hauteur. Mais, comme l'eau est 840 fois plus pesante que l'air, il est clair que, pour comparer les poids, il faut diviser les 9380 par 840: ce qui donne $11\frac{1}{6}$. Donc chaque

ligne

ligne d'eau qui s'évaporoit du tuyau dans la derniere expérience, augmentoit la gravité spécifique de l'air d'une $\frac{6}{67}$ partie. Ou bien, en supposant le poids de l'air avant l'évaporation égal à 67, il augmentoit de 6 pour chaque ligne d'eau qui s'évaporoit du tuyau. Or, comme un pied cube d'air pese environ $\frac{1}{12}$ de livre ou 640 grains, il faudra compter $57\frac{1}{3}$ ou nombre rond 57 grains d'augmentation pour chaque ligne d'eau qui s'évaporoit du tuyau.

§. 62. Mais, pour comparer encore l'évaporation avec la marche de l'hygrometre, j'y ai employé les degrés observés les matins, afin de faire abstraction des anomalies qui venoient de la variation de la chaleur (§. 58.). C'est sur ce pied que j'ai dessiné la onzieme Figure, où la ligne des abscisses AB est divisée en 6 parties égales, comme représentant les 6 lignes d'évaporation observées. Les ordonnées prises sur l'échelle BD représentent les degrés parcourus par l'aiguille de l'hygrometre. Comme donc la courbe AD tourne sa concavité vers AB, on voit que la marche de l'hygrometre se rallentit, quand encore l'humidité s'accroît également. Planche II. Fig. 11.

§. 62. J'ai aussi dessiné dans la même Figure la courbe AC qui marque la marche de l'hygrometre dans la premiere expérience (§. 58.) pour autant de lignes d'évaporation du petit tuyau, qui avoit une ouverture 7 fois plus petite. Aussi les ordonnées sont-elles environ 7 fois plus petites. Car, l'ordonnée CD étant de 610 degrés, l'ordonnée CB est à peine de 90. Ce n'est pas cependant que cela me satisfasse; car, à proprement parler, l'ordonnée CB auroit dû être égale à l'ordonnée EF, construite sur AE $=$ $\frac{1}{7}$AB, puisqu'une évaporation de $\frac{6}{7}$ ligne du grand tuyau doit produire un même degré d'humidité qu'une évaporation de 6 lignes du petit tuyau. Et cela devroit faire CB $=$ EF. Or on voit que CB est beaucoup plus petite. Il faudra donc conclure que, dans l'un & l'autre cas, l'eau évaporée s'est en partie attachée au verre; & comme elle en avoit plus le tems dans la premiere expérience que dans la seconde, cela avoit pu produire, du moins en partie, la différence qui se voit entre les ordonnées

pées BC, EF. Aussi peut-on établir que, tandis que dans la seconde expérience il s'évaporoit 7 fois plus d'eau en même tems, cela pouvoit agir plus efficacement sur l'hygrometre, que dans la premiere expérience. Car il est très sûr, que quelque sensible que puisse être la corde de l'hygrometre, elle ne l'est pas infiniment. Il faudra toujours lui attribuer un certain degré d'inertie, qui fait qu'un petit changement d'humidité ne l'affecte pas. Par cette raison nous ferons mieux de nous en tenir à la seconde expérience, où toutes ces petites anomalies doivent naturellement avoir été beaucoup moins sensibles.

§. 63. Comme donc les 6 lignes d'eau évaporées dans la derniere expérience avoient fait tourner l'aiguille de l'hygrometre F de 610 degrés, il s'ensuit que l'hygrometre A n'auroit tourné que de 220 degrés. Car les cordes étant de même grosseur, les mouvemens sont en raison de leur longueur. Or il est (§. 28. 31.)

$$33\tfrac{1}{2} : 12 = 610 : 219$$

ou nombre rond 220 degrés. Cette variation de l'hygrometre A est très possible en plein air. Il s'ensuit donc que l'humidité de l'atmosphere peut varier tout autant que celle de l'air renfermé dans le verre. Mais nous avons vu (§. 61.) que pour chaque ligne d'évaporation un pied cube de cet air augmentoit de 57 grains, ce qui pour 6 lignes donne 342 grains. Ce poids étant ajouté à 640 grains, donne le poids d'un pied cube d'air très humide, de 982 grains: Ce qui fait un rapport de 13 à 20. Or j'ai fait voir dans un Mémoire sur la vîtesse du son, que l'air peut très bien être chargé d'un tiers de son poids, de particules aqueuses & non-élastiques. Nous voyons donc que le résultat de la derniere expérience ne s'accorde pas mal avec ce que j'avois déduit d'autres principes, totalement différens de ceux que j'ai établis dans le présent Mémoire. Du reste il est bien sûr que l'air peut encore être plus chargé de vapeurs. Il l'étoit sans contredit dans l'expérience du §. 47. où l'hygrometre D avoit fait un tour de 840 degrés, & même de 1020 degrés, lorsqu'il séchoit dans un air

air plus sec (§. 54.) que celui du tems où je l'avois mis dans le verre. Or, comme les cordes des hygrometres sont de même grosseur, on voit que l'hygrometre F auroit dans les mêmes circonstances fait un tour beaucoup plus grand, c. à d. de 1890 degrés. Car il est (§. 28. 30.)

$$18: 33\frac{1}{2} = 1020: 1898$$

ou nombre rond 1900 degrés, ce qui est plus que le triple des 610 degrés que l'évaporation de 6 lignes d'eau lui avoit fait parcourir. Cependant il ne paroit pas vraisemblable que l'air libre puisse jamais être aussi chargé d'humidité qu'il l'étoit dans le verre après 5 jours d'évaporation de l'eau qui en couvroit le fond. Je n'ai point encore vu l'hygrometre A au dessous du degré VI. Il étoit sur ce degré dans un tems où l'humidité de l'air s'attachoit très sensiblement aux murs, au linge, au papier. Le degré de la plus grande sécheresse que j'aye observé, c'est le degré III, (c'étoit le 28 Mai 1769, & l'air étoit si sec, que l'encre séchoit dans un instant non seulement sur le papier mais même dans la plume,) de sorte que la plus grande variation de cet hygrometre n'excédoit pas 270° ou les ¾ du cercle.

§. 64. J'ai dit ci-dessus que les hygrometres faits d'éponges ne sont gueres sensibles (§. 26.). Pour m'en assurer, je pris une petite éponge, qui ne pesoit que 38 grains poids de Berlin: je la trempai dans l'eau, & l'ayant ensuite comprimée pour en faire écouler l'eau, elle pesa 93 grains, de sorte qu'elle avoit 55 grains d'humidité de plus, que lorsqu'elle étoit seche. C'est ce que je fis le 19 Oct. 1768 à 3½ heures après-midi. Je la suspendis à une balance afin de mesurer la diminution successive de ces 55 grains d'eau, & je trouvai

tems	poids
0h. 0'	55
2. 25	42
3. 20	41
5. 21	32
6. 45	27
16. 0	9

de sorte qu'après 16 h. de tems elle avoit encore 9 grains d'humidité.

§. 65. Le 20 Octobre 1768, à 7 heures du matin, je pris une autre éponge qui pesoit 51 grains, & après avoir été humectée 138 grains, de sorte qu'elle se trouvoit imprégnée de 87 grains d'eau. En séchant elle perdit ces 87 grains comme suit:

tems	poids	tems	poids
0h. 0′	87	13h.30′	36
0. 18	85	15. 20	31
0. 55	81	16. 12	29
1. 30	78	22. 5	21
2. 5	75	24. 50	17
3. 4	72	25. 45	16
5. 1	64	26. 30	14
6. 11	60	27. 35	13
7. 14	56	28. 34	12
8. 54	50	29. 49	11
10. 18	46	31. 11	10
11. 28	42	33. 48	7
12. 34	39	38. 35	4
		48. 22	1

Ainsi il fallut deux jours de tems avant que cette éponge perdît toute l'humidité qu'elle avoit prise.

§. 66. Le 22 Octobre 1768, à 8 heures du matin, je liai ces deux éponges ensemble qui s'imprégnerent de 138 grains d'eau; cette humidité se perdit comme suit

tems

tems	poids	tems	poids
$0^h. 0'$ - - -	138	$28^h. 30'$ - - -	63
1. 0 - - -	133	30. 0 - - -	60
3. 30 - - -	125	34. 0 - - -	53
6. 22 - - -	114	48. 0 - - -	36
8. 35 - - -	107	51. 30 - - -	32
9. 45 - - -	104	54. 0 - - -	26
13. 5 - - -	97	57. 30 - - -	21
14. 32 - - -	94	62. 0 - - -	17
24. 0 - - -	73	72. 0 - - -	11
26. 20 - - -	68	83. 0 - - -	6
		96. 0 - - -	3

de ſorte qu'en quatre jours de tems cette éponge ne s'étoit point encore tout à fait ſéchée.

§. 67. Comme, pendant ces trois expériences, l'humidité de l'air extérieur ne varioit que très peu, les éponges doivent avoir ſéché aſſez régulierement. La quinzieme Figure fait voir cela d'un coup d'œil pour les trois expériences. Les abſciſſes marquent le tems, les ordonnées font voir pour chaque moment le poids de l'humidité qui reſtoit encore dans l'éponge. Ce n'eſt qu'en D où le deſſéchement étoit un peu irrégulier, comme on le voit par la ligne ponctuée. Auſſi voit-on dans la ſeptieme Figure que le 24 Octobre l'humidité de l'air avoit varié un peu plus ſenſiblement. Planche III. Fig. 15.

§. 68. Les éponges ne pouvoient ſécher qu'à meſure que l'air extérieur touchoit immédiatement les particules d'eau dont elles étoient pénétrées. Ainſi c'eſt aux ſurfaces extérieures que le deſſéchement devoit commencer. C'eſt auſſi ce que l'expérience fait voir. On n'a qu'à laiſſer ſécher une éponge. Les extrémités ſeront ſeches tandis que les parties intérieures ſeront encore fort humides. Si, au lieu d'une éponge mouillée, on ſuppoſe un globe d'eau librement expoſé à l'air, la loi des ſurfaces (§. 9.) veut que le diametre diminue en rai-

 ſon

son simple & directe du tems. Or le poids du globe est en raison du cube du diametre. Ainsi ce poids diminue en raison cubique du tems que l'air doit encore employer pour achever l'évaporation. Si donc le dessèchement de l'éponge suivoit la même loi, la racine cubique de l'humidité décroîtroit en raison simple du tems. Mais, comme l'accès de l'air aux parties intérieures de l'éponge est moins libre, il y a apparence que l'éponge sécha un peu moins vîte. Quoi qu'il en soit, il est facile d'en faire l'essai sur la troisieme de ces expériences (§. 66.) en prenant le tems de 12 en 12 heures.

tems	poids	racine cubique	différence
0	138	5, 17	—
12	101	4, 66	0, 51
24	72	4, 16	0, 50
36	49	3, 66	0, 50
48	33	3, 21	0, 45
60	20	2, 71	0, 50
72	12	2, 29	0, 42
84	7	1, 91	0, 38
96	3	1, 44	0, 47

Toutes ces différences devroient être égales. Or, à quelque anomalie près, elles ne sont pas fort différentes. Mais il semble pourtant qu'elles diminuent vers la fin, & c'est une marque que l'éponge séchoit un peu moins vîte que n'auroit fait un globe d'eau.

§. 69. Dans la seconde expérience nous avons

tems	poids	racine cubique	différence
0	87	4, 43	—
12	41	3, 45	0, 98
24	18	2, 62	0, 83
36	6	1, 81	0, 81
48	1	1, 00	0, 81

Ici les différences sont encore assez égales, quoiqu'un peu plus petites vers la fin, mais beaucoup plus grandes que celles de la troisieme expérience.

§. 70.

Janv.

10 11 12 13 14

D

Fig.6.

B

31 3 10 15 17

bre Janvier

C

Fig.5.

B

10 20 30 40 50 60

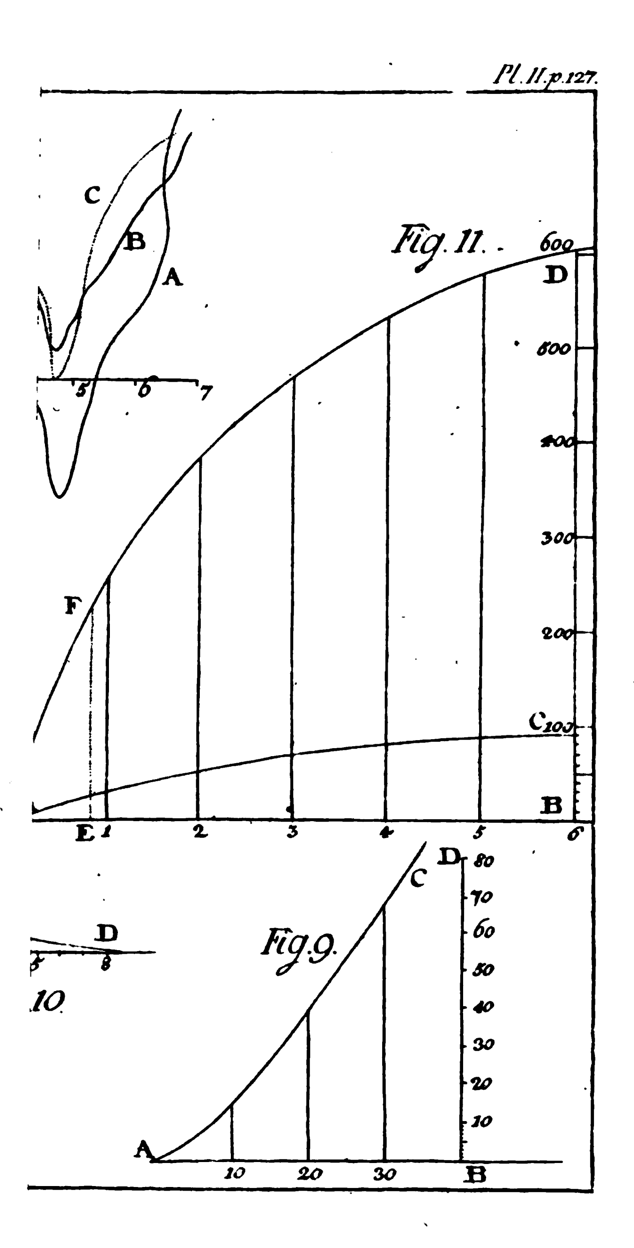
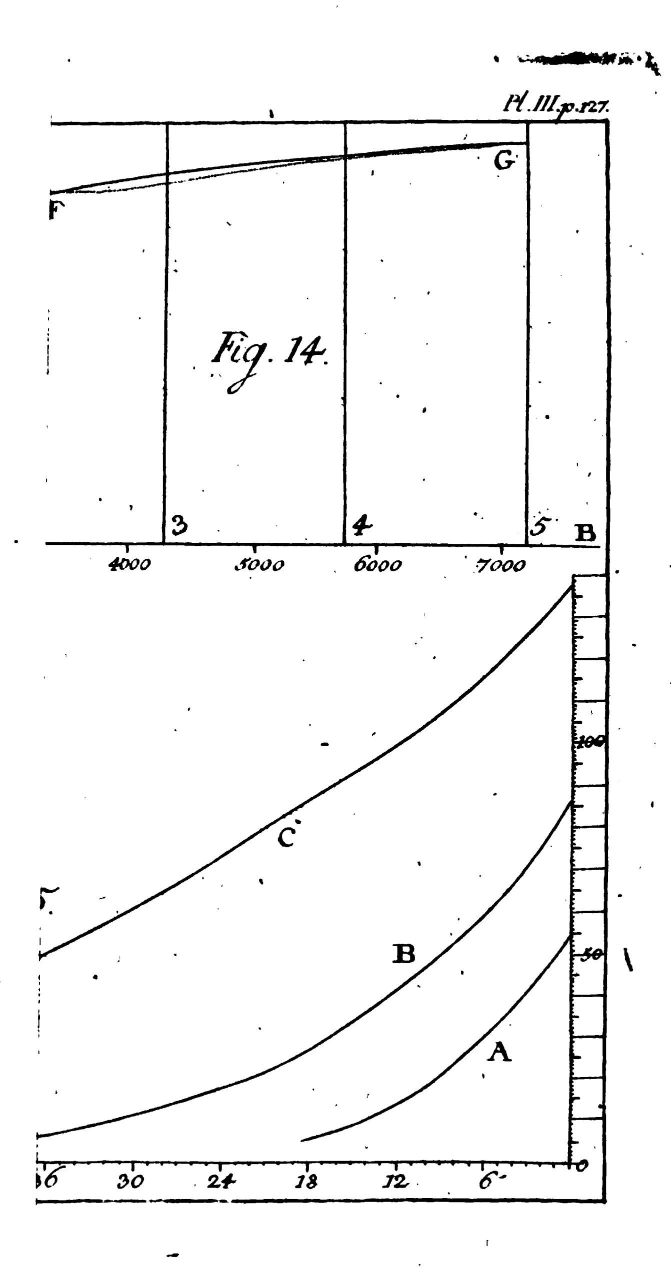


Fig. 11.
C
B
A
5
6
7
600
D
500
400
300
F
200
C 100
B
E 1
2
3
4
5
6
D 80
70
60
50
40
30
20
10
C
D
8
10.
Fig. 9.
A
10
20
30
B



Pl. III. p. 127.
G
F
Fig. 14.
3
4
5
B
4000
5000
6000
7000
100
C
B
50
A
0
36
30
24
18
12
6

§. 70. Dans la premiere expérience nous avons

tems	poids	racine cubique	différence
0	55	3, 80	—
12	14	2, 41	1, 39
24	1	1, 00	1, 41

Ici les différences font encore fort égales, mais pourtant plus grandes que dans la feconde expérience.

§. 71. Cette différence provient de ce que, dans les trois éponges, le rapport entre le volume & la furface n'eft pas le même, mais qu'il diminue à mefure que le volume eft plus grand. Il s'y joint encore une autre raifon, qui eft que l'accès de l'air extérieur aux parties intérieures de l'éponge devient plus difficile à mefure que l'éponge a plus de diametre; & c'eft là encore ce qui doit rallentir le defféchement. Le poids des éponges étoit de 38, 51 & 89 grains, & ces nombres font en même tems comme leurs volumes. Mais, comme la figure des éponges n'étoit pas abfolument réguliere, je ne déciderai pas quel rapport il faudroit établir à cet égard.



EXTRAIT

EXTRAIT
DES
OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À BERLIN PAR ORDRE DE L'ACADÉMIE DANS LES ANNÉES 1768. ET 1769.

PAR MR. BEGUELIN.

Notice préliminaire.

Les inſtrumens deſtinés à ces obſervations n'ayant été prêts que vers la fin d'Avril 1768, mes obſervations ne remontent pas plus haut qu'au 1 Mai 1768.

Le *Barometre* dont je me ſers principalement eſt un barometre ſimple: le tuyau a $2\frac{1}{2}$ lignes de Paris d'ouverture, & 35 pouces de longueur; l'échelle eſt diviſée en pouces & lignes duodécimales de Paris: & comme 29 pouces de cette échelle ſont à très peu près 30 pouces du pied du Rhin, on peut ſans erreur ſenſible réduire les hauteurs barométriques rapportées ici, au pied du Rhin, en ajoutant ſimplement un pouce à la hauteur obſervée. Le rapport de ces meſures étant exactement comme 1440 à 1391,2; 30 pouces du Rhin ſont préciſément 28 pouces 11,8 lignes de Paris, & l'on a 1 ligne du Rhin $= 0''',966$ de Paris; ou 1 ligne de Paris $=$ 1,035 lignes du Rhin.

Les *Thermometres* qui ſervent à mes obſervations ſont ſuſpendus en plein air à l'ombre, dans une expoſition qui décline à peine de 5^d du Nord vers l'Oueſt. L'un eſt placé dans l'angle oriental, & l'autre dans l'angle occidental de la fenêtre. J'ai vérifié que, dans une même température, ils correſpondent avec la plus grande exactitude,

tude, de ſorte que la petite différence qu'il y a ſouvent entr'eux dans leur poſition actuelle réſulte de leur diverſe expoſition, & principalement de l'action des vents d'Eſt & d'Oueſt, combinée avec l'humidité de l'air.

Ces thermometres ont une double graduation, l'une ſelon Mr. de Réaumur; & c'eſt celle que je marque dans mes tables, afin de pouvoir mieux comparer ces obſervations avec celles des autres lieux où l'on ſuit cette échelle. L'autre graduation eſt de l'invention de Mr. Sulzer. Sa méthode revient à celle de Mr. de l'Isle en ce qu'on n'y ſuppoſe qu'un terme fixe, & que chaque degré de l'échelle contient une dix-millieme partie de la maſſe totale du mercure; mais au lieu que Mr. de l'Isle partoit du point de l'eau bouillante, qu'on a regardé pendant longtems comme un terme invariable, Mr. Sulzer prend avec Mr. de Réaumur pour terme fixe le point de la congélation naturelle de l'eau, ou plutôt celui du dégel, ou plus préciſément encore le point de chaleur de l'eau ſous la glace: terme que les Phyſiciens ont trouvé être conſtant, par des expériences répétées ſous divers climats. Ce terme, qui répond à zéro dans la graduation de Mr. Sulzer, & dans celle de Mr. de Réaumur, répond à très peu près au 32me degré de Fahrenheit & au 150me degré de Mr. de l'Isle.

Outre ce terme fixe, Mr. de Réaumur pour rendre ſes thermometres correſpondans prend encore celui de l'eau bouillante, & fait l'intervalle entre ces deux termes de 80 degrés de ſon échelle, dont chacun eſt la cinq-millieme partie du volume total. Mais ces deux conditions ne peuvent ſe réunir exactement qu'autant qu'on prépare l'eſprit de vin, pour lui donner un certain degré de dilatabilité, ce qui n'eſt pas applicable au mercure; auſſi le terme de la chaleur du ſang, qui, dans les thermometres qu'on fait communément ſur la graduation de Réaumur, tombe entre le 32 & le 33me degré de l'échelle, ne doit tomber dans ſa véritable graduation qu'entre le 28 & le 29 degré, ce qui répond au 56 degré de l'échelle de Mr. Sulzer.

RAPPORT
des diverses graduations du Thermometre.

En nommant les quatre diverses échelles dont j'ai parlé, de la lettre initiale du nom de leur auteur; on a $0.R = 0.S = 150.I = 32.F$, & $80 R = 156 S = 0.I = 212 F$, ce qui donne

$$1^d.R = \tfrac{39}{20}{}^d.S = \tfrac{15}{8}{}^d.I = \tfrac{9}{4}{}^d.F,$$
$$1^d.S = \tfrac{20}{39}{}^d.R = \tfrac{25}{26}{}^d.I = \tfrac{15}{13}{}^d.F,$$
$$1^d.I = \tfrac{8}{15}{}^d.R = \tfrac{26}{25}{}^d.S = \tfrac{6}{5}{}^d.F,$$
$$1^d.F = \tfrac{4}{9}{}^d.R = \tfrac{13}{15}{}^d.S = \tfrac{5}{6}{}^d.I.$$

Mais il faut observer I°. que les degrés du thermometre de Mr. de l'Isle croissent & décroissent en sens contraire des trois autres échelles. Donc, pour rapporter un degré quelconque n d'une de ces échelles au degré équivalent de Mr. de l'Isle, leur rapport doit être pris négativement. Ainsi ayant $n.R = \frac{15.n}{8} I$, il faut soustraire $\frac{15.n}{8}$ de 150, pour avoir le degré du thermometre de de l'Isle correspondant au degré n de Réaumur; ce qui donne les formules $n^d R = 150 - \frac{15.n^d}{8} I$, & $n^d.I = 80 - \frac{8}{15} n^d.R$. Par exemple, 20 degrés de Réaumur vaudront par la premiere formule $150 - \frac{15.\ 20}{8}$ degrés de de l'Isle, c. à d. $112\frac{1}{2}$; & $112\frac{1}{2}$ degrés de de l'Isle répondront par la seconde formule à $80 - \frac{8.\ 112\frac{1}{2}}{15}$ degrés de Réaumur.

II°. que pour comparer les degrés de Fahrenheit, qui commencent à 32 au dessous du dégel, il faut en soustraire ce nombre 32,

ce

ce qui donne les formules $n^d.\,R = 32 + \frac{9\,n^d}{4}.\,F$, & $n^d.\,F = \frac{4\,(n^d - 32)}{9}\,R$. Ainſi le degré de la chaleur du ſang étant $96\frac{1}{2}$ du thermometre de Fahrenheit, ce degré doit répondre au degré $\frac{4\,(96\frac{1}{2} - 32)}{9}$ de Réaumur, c. à d. au $28\frac{2}{3}$ degré de cette échelle.

Les obſervations ſont faites chaque jour à ſept heures du matin, à deux heures après-midi, & à dix heures du ſoir. Je ne rapporte dans cet extrait de mes tables que la plus grande & la plus petite hauteur du mercure pour chaque mois, avec le milieu entre ces extrêmes, & la hauteur moyenne qui réſulte des trois obſervations journalieres. On trouvera à la fin du Volume deux planches qui repréſentent la hauteur quotidienne du Barometre, & le mouvement du mercure pendant toute l'année. Planches IV. & V.

Je ne donne pareillement ici, des obſervations thermométriques, que le tableau de la plus grande & de la moindre chaleur de chaque mois de l'année, obſervée à la même heure, tant pour le midi que pour le matin & le ſoir: & comme ces deux derniers termes ne different presque point, je n'en fais qu'un ſeul tableau.

Les obſervations ſur la direction des vents ne ſont gueres ſuſceptibles d'extraits. Je fais dans mes tables, & je crois qu'il eſt très important de le faire, une double colonne, l'une pour marquer la direction du vent dans la région des nuées, & l'autre pour indiquer le vent qui regne en même tems à la ſurface de la terre. Je ne donnerai ici ſous chaque mois qu'un rapport très concis de la conſtitution de l'air; & à la fin de chaque année une indication des aurores boréales, ou des autres phénomenes que j'aurai pû obſerver.

TABLEAU

des hauteurs barométriques extremes & moyennes de chaque mois; pour l'Année 1768.

Mois	Jours	le plus haut degré	Jours	le plus bas degré	variation totale	le milieu	hauteur moyenne
Mai	le 23	28″.5, 5	le 19	27″.5‴,5	12‴	27. 11, 5	28″.0‴,37
Juin	le 24.25	28. 4	le 10	27. 7, 5	8, 5	27. 11,75	27. 11,95
Juillet	le 28.29	28. 3	le 19	27. 8	7	27. 11, 5	28. 0, 1
Août	le 14	28. 4	le 27	27. 7, 5	8, 5	27. 11,75	28. 0,35
Sept.	le 27.28	28. 6, 5	le 18	27. 6, 5	12	28. 0, 5	28. 0,25
Oct.	le 21	28. 6, 5	le 5	27. 8, 5	10	28. 1, 5	28. 0, 9
Nov.	le 7	28. 5, 5	le 22	26.11, 5	18	27. 8, 5	27. 10,75
Déc.	le 12	28. 5, 5	le 1	27. 6, 5	11	28. 0	28. 2, 3
		28″.6‴,5		26″.11, 5	19‴	27″.11,62	28″. 0,37

TABLEAU

des hauteurs thermométriques extremes & moyennes de chaque mois, pour l'Année 1768 *à midi.*

Mois	Jour	le plus haut degré	Jour	le plus bas degré	différence totale	le milieu	chaleur moyenne
Mai	le 31	21, 5	le 11	8^d	13^d,5	14^d,75	13^d, 8
Juin	le 12	22, 5	le 3	11	11, 5	16,75	17,15
Juillet	le 7	23, [illegible]	le 17	11	12, 5	18	18,25
Août	le 17	24	le 28	13	11	17, 5	17, 6
Septembre	le 1	19	le 27.28	10	9	14, 5	13, 1
Octobre	le 5.7	15	le 24	1,5	13, 5	8, 25	8,58
Novembre	le 4.5	9	le 14	2	7	5, 5	5,23
Décembre	le 1	8, 5	le 13.16	− 4	12, 5	+ 2, 25	+ 1,97
		24		− 4	28	12, 2	11, 9

Le même Tableau pour l'heure du matin & du soir.

Mois	Jour	le plus haut degré	Jour	le plus bas degré	différence totale	le milieu	chaleur moyenne
Mai	le 31	15,5	le 11	4, 5	11	10	11, 3
Juin	le 14	18	le 3	8	10	10	12, 8
Juillet	le 7. 26. 28	18	le 17. 18	10	8	14	14, 3
Août	le 7	17	le 27. 28	9	6	13	13,28
Septemb.	le 1. 2. 13	13	le 27. 28	4, 5	8, 5	8,75	8, 9
Octobre	le 7. 9	11	le 24	— 4	15	+ 3, 5	+ 4, 5
Novemb.	le 4. 5. 30	5	le 14	— 2, 5	7, 5	+ 1,25	+ 2, 3
Décembre	le 1. 26	4,5	le 17	— 5	9, 5	— 0,25	— 0,75
		+ 18		— 5	23	+ 7,53	+ 8,45

OBSERVATIONS

plus détaillées pour chaque mois.

MAI 1768.

La direction du vent.

6 Jours N.E. le 3. 17. 18. 22. 23. 29.
4 - - E. le 6. 7. 10. 30.
3 - - S.E. le 2. 11. 31.
1 - - W. le 1.
17 - - N.W. le 4. 5. 8. 9. 12—16. 19—21. 24—28.
Cinq jours de *vent fort*, le 13. 15. 26. 29. 31.

NB. W. signifie le vent d'Ouest, pour éviter l'équivoque du signe O.

La température de l'air.

15 Jours sereins, le 1. 3—7. 10. 11. 22—25. 29. 31.
7 - - à moitié couverts, le 2. 9. 15. 20. 21. 27. 28.
9 - - couverts, le 8. 12—14. 16—19. 26.
13 - - pluvieux, le 2. 8. 9. 12. 13. 15—20. 26. 27.
2 - - de petite grêle, le 14. 15.
1 - - de tonnere, le 2.

NB. Par jours *sereins* il faut entendre aussi ceux où il n'y a eu que de légers nuages épars; & par jours *pluvieux* tous ceux où il y a eu quelque pluie.

Le Barometre a été:

2 jours entre	27″,	6‴	à	8‴,	le 18. 19.
0 - - -		8	à	10	
10 - - -		10	à	12,	le 8. 12. 13. 14. 17. 20. 26. 29. 30. 31.
9 - - -	28,	0	à	2,	le 1—4. 7. 15. 16. 27. 28.
6 - - -		2	à	4,	le 6. 9. 11. 21. 24. 25.
4 - - -		4	à	6,	le 5. 10. 22. 23.

Le Thermometre a été à midi:

8 jours entre les degrés	8 — 10,	le 10—17.
4 - - - - - - -	10 — 12,	le 9. 18. 19. 26.
2 - - - - - - -	12 — 14,	le 1. 20.
7 - - - - - - -	14 — 16,	le 2. 21. 22. 23. 25. 27. 28.
6 - - - - - - -	16 — 18,	le 3. 5. 6. 8. 24. 29.
3 - - - - - - -	18 — 20,	le 4. 7. 30.
1 - - - - - - -	20 — 22,	le 31.

JUIN 1768.

La direction du vent.

1 Jour N. le 15.
8 - - N.E. le 2—9.
3 - - E. le 12. 13. 25.
2 - - S.E. le 1. 14.
4 - - S.W. le 18—20. 28.
9 - - W. le 10. 11. 14. 15—17. 21—23.
5 - - N.W. le 24. 26. 27. 29. 30.
Huit jours de *vents forts*, le 1. 3. 5. 10. 22. 23. 28. 29.

La température de l'air.

7 Jours sereins, le 1. 2. 5. 6. 8. 12. 25.
12 - - à moitié couverts, le 4. 7. 9. 11. 13. 15—17. 20. 23. 24. 27.
11 - - couverts, le 3. 10. 14. 18. 19. 21. 22. 26. 28—30.
15 - - pluvieux, le 3. 4. 9. 10. 14. 15. 18—22. 26. 28—30.
dont 5 de forte pluie, le 18. 20. 21. 26. 30.
3 - - de tonnere, le 18. 21. 28.

Le Barometre a été:

4 Jours entre	27'', 8'''	à	10''',	le 9. 10. 14. 28.
7 - - -	10	à	12,	le 1. 8 11. 13. 15. 27. 29.
14 - - -	28, 0	à	2,	le 2—7. 12. 16. 18—21. 26. 30.
5 - - -	2	à	4,	le 17. 22. 23. 24. 25.

Le Thermometre a été à midi:

3 Jours entre les degrés	10—12,	le 3. 15. 21,
4 - - - - - - -	12—14,	le 2. 10. 22. 23.
3 - - - - - - -	14—16,	le 24. 29. 30.
7 - - - - - - -	16—18,	le 4. 14. 16. 18—20. 25.
9 - - - - - - -	18—20,	le 1. 5. 6. 9. 11. 17. 26—28.
3 - - - - - - -	20—22,	le 7. 8. 13.
1 - - - - - - -	22—24,	le 12.



JUILLET 1768.

La direction du vent.

3 Jours N.E. le 23. 24. 25.
2 - - E. le 29. 30.
3 - - S.E. le 26—28.
4 - - S.W. le 7. 16. 19. 31.
13 . - W. le 2. 4. 6. 8—15. 18. 20.
6 - - N.W. le 1. 3. 5. 17. 21. 22.
5 - - vents forts, le 3. 7. 8. 17. 19.

La température de l'air.

6 Jours sereins, le 1. 2. 24. 26. 28. 29.
14 - - à moitié couverts, le 3—7. 9. 11. 12. 16. 18. 20. 25. 27. 30.
12 - - couverts, le 4. 8 10. 13—15. 17. 19. 21—23. 31.
14 - - pluvieux, le 3. 7. 8. 10. 12. 13. 14. 16—19. 21. 27. 31.
dont *six* de pluie abondante, le 10. 13. 14. 17. 21. 27.
0 - - de tonnere.

Le Barometre a été:

3 Jours entre 27'', 8 à 10''', le 8. 19. 20.
7 - - - 10 à 12, le 3. 7. 15. 17. 18. 21. 31.
14 - - - 28, 0 à 2, le 2. 4. 9—14. 16. 22. 25—27. 30.
7 - - - 2 à 3, le 1. 5. 6. 23. 24. 28. 29.

Le Thermometre a été à midi.

1 Jour entre les degrés 10—12, le 7.
1 - - - - - - - - 12—14, le 21.
6 - - - - - - - - 14—16, le 3. 10. 12. 15. 18. 22.
10 - - - - - - - - 16—18, le 1. 8. 9. 11. 13. 14 19. 20. 23. 31.
5 - - - - - - - - 18—20, le 4. 5. 16. 24. 25.
6 - - - - - - - - 20—22, le 2. 6. 26. 27. 28. 30.
2 - - - - - - - - 22—24, le 7. 29.

NB. Le 29 & le 30, la boule du thermometre étant exposée au soleil, le mercure marqua exactement le degré de la chaleur du sang.

AOUT

AOUT 1768.

La direction du vent.

1 Jour N. le 13.
1 - - E. le 14.
1 - - S.E. le 15.
7 - - S.W. le 2. 7. 19. 21—24.
14 - - W. le 3. 4. 6. 8. 9. 12. 16—18. 25. 26. 29—31.
7 - - N.W. le 1. 5. 10. 11. 20. 27. 28.
Huit jours de gros vent, le 4. 7. 8. 10. 19. 20. 26. 27.

La température de l'air.

9 Jours sereins, le 12—16. 21. 29—31.
9 - - à moitié couverts, le 1. 2. 5. 7. 8. 10. 11. 18. 19.
13 - - couverts, le 3. 4. 6. 9. 17. 20. 22—28.
16 - - pluvieux, le 1. 2. 3. 5. 7—10. 17. 18. 20. 23—26. 28.
dont *cinq* de pluie abondante, le 9. 24. 25. 26.
6 - - de tonnere, le 5. 7. 17. 18. 22. 23.

Le Barometre a été:

1 Jour entre 27'', 8—10''', le 27.
10 - - - 10—12, le 7. 8. 17. 18. 23—26. 28. 29.
14 - - - 28, 0—2, le 1. 3—5. 9—11. 16. 19—22. 30. 31.
6 - - - 2—4, le 2. 6. 12—15.

Le Thermometre a été à midi:

3 Jours entre les degrés 12—14, le 9. 26. 27.
8 - - - - - - - - 14—16, le 8. 10. 11. 24. 25. 28—30.
9 - - - - - - - - 16—18, le 4. 5. 7. 12. 13. 20. 22. 23. 31.
5 - - - - - - - - 18—20, le 1. 3. 6. 14. 19.
5 - - - - - - - - 20—22, le 2. 15. 16. 18. 21.
1 - - - - - - - - 22—24, le 17.

La boule du thermometre étant exposée le 17 aux rayons du soleil, le mercure a marqué 29^d.

SEPTEMBRE 1768.

La direction du vent.

2 Jours N. le 25. & 26.
4 - - N.E. le 24. 27—29.
2 - - S. le 8. 17.
10 - - S.W. le 1. 2. 5. 13—16. 18—20.
7 - - W. le 4. 6. 10. 12. 21—23.
5 - - N.W. le 3. 7. 9. 11. 30.
Cinq jours de *vents forts*, le 2. 11. 13. 19. 22.

La température de l'air.

5 jours sereins, le 14. 24. 27. 28. 29.
13 - - à moitié couverts, le 3. 4. 6. 7. 9. 11—13. 16. 18. 20. 21. 26.
12 - - couverts, le 1. 2. 5. 8. 10. 15. 17. 19. 22. 23. 25. 30.
16 - - pluvieux, le 1. 2. 4. 5. 8. 11. 12. 15—17. 19. 21. 22. 25. 26. 30. dont *onze* de pluie abondante, le 1. 2. 4. 8. 11. 12. 15. 17. 21. 22. 25.
3 - - de tonnere, le 1. 12. 15.

Les grands orages ont passé à côté de Berlin. Celui du 1 Septembre qui fut violent à Magdebourg à 4 h. après-midi, commença ici vers les sept heures du soir. Ce même jour il tomba à Londres une pluie excessive pendant 7 heures; & le barometre descendit ici de 27″, $10\frac{1}{2}$‴ à 27″, $7\frac{1}{2}$‴ dans les 24 heures.

La nuit du 8 au 9, on essuya à Bordeaux & à Bayonne un ouragan furieux accompagné & suivi d'une pluie très forte jusqu'au 13. Ici le barometre tomba de 4 lignes du 8 au 9.

Le

Le Barometre a été:

3 Jours entre 27'', 6 — 8''', le 2. 17. 18.
4 - - - 8 — 10, le 5. 9. 10. 16.
11 - - - 10 — 12, le 1. 4. 6—8. 11—13. 19. 23. 24.
5 - - - 28, 0 — 2, le 3. 20—22. 25.
4 - - - 2 — 4, le 14. 15. 26. 30.
1 - - - 4 — 6, le 29.
2 - - - 6 — 6,5, le 27. 28.

Le Thermometre a été à midi:

4 Jours entre les degrés 8—10, le 25. 26. 27. 30.
4 - - - - - - 10—12, le 8. 17. 24. 28.
13 - - - - - - 12—14, le 3.4.9—11.14.16.18—20.23.29.
5 - - - - - - 14—16, le 5. 7. 12. 15. 21.
2 - - - - - - 16—18, le 6. 13.
2 - - - - - - 18—20, le 1. 2.

OCTOBRE 1768.

La direction du vent.

2 Jours N.E. le 12. 29.
7 - - E. le 13. 14. 19—21. 24. 30.
5 - - S.E. le 3. 4. 7. 18. 27.
2 - - S. le 5. 8.
8 - - S.W. le 6. 9—11. 16. 25. 26. 28.
7 - - W. le 1. 2. 15. 17. 22. 23. 31.
Un jour de vent un peu fort, le 26.

La température de l'air.

8 Jours sereins, le 1. 3. 4. 13. 14. 19. 24. 30.
7 - - à moitié couverts, le 2. 7. 10. 16. 20. 21. 27.
15 - - couverts, le 5. 6. 8. 9. 11. 12. 15. 17. 22. 23. 25. 26. 28. 29. 31.
5 - - de brouillards, le 1. 4. 5. 8. 18.
1 - - de bruine, le 18.
8 - - pluvieux, le 6. 8. 9. 11. 22. 26. 28. 31.
dont *trois* de pluie abondante, le 8. 9. 11.
1 - - de petite neige, le 23.
3 - - de gelée, le 19. 23. 28.

Il a gelé pour la premiere fois la nuit du 18 au 19 Octobre.

Le Barometre a été:

1 Jour entre	27″,	8 — 10‴,	le 5.
9 - - -		10 — 12,	le 4. 6—9. 11. 12. 26. 31.
4 - - -	28,	0 — 2,	le 10. 25. 27. 28.
13 - - -		2 — 4,	le 1—3. 13. 15—19. 23. 24. 29. 30.
4 - - -		4 — 6,5,	le 14. 20—22.

Le 30 Octobre il y eut un tremblement de terre à la Jamaïque. Le mercure descendit ici du 30 au 31. de 4 lignes.

Le Thermometre a été à midi:

2 Jours entre les degrés	0 — 2,	le 23. 24.
3 - - - - - - - -	2 — 4,	le 19. 21. 22.
3 - - - - - - - -	4 — 6,	le 20. 25. 30.
6 - - - - - - - -	6 — 8,	le 13—15. 18. 28. 31.
6 - - - - - - - -	8 — 10,	le 1. 2. 12. 26. 27. 29.
3 - - - - - - - -	10 — 12,	le 11. 16. 17.
6 - - - - - - - -	12 — 14,	le 3. 4. 6. 8. 9. 10.
2 - - - - - - - -	14 — 16,	le 5. 7.

NOVEM-

NOVEMBRE 1768.

La direction du vent.

2 Jours N.E. le 14. 23.
3 - - S.E. le 18. 22. 24.
1 - - S. le 16.
7 - - S.W. le 10. 17. 20. 21. 28—30.
12 - - W. le 1—4. 8. 9. 11—13. 15. 25. 26.
5 - - N.W. le 5—7. 19. 27.
Cinq jours de vents forts, le 1. 3. 5. 25. 26.

La température de l'air.

6 Jours ſereins, le 6. 7. 14—16. 24.
12 - - à moitié couverts, le 4. 5. 8. 10—13. 17. 18. 23. 25. 27.
12 - - couverts, le 1—3. 9. 19—22. 26. 28—30.
7 - - pluvieux, le 1. 3. 4. 8. 9. 26. 27.
dont un ſeul de pluie copieuſe, le 4.
8 - - de brouillards, le 16. 18—22. 24. 26.
4 - - de bruine, le 20. 25. 28. 30.
2 - - de gelée blanche, le 10. 17.
5 - - de gelée, le 7. 8. 10. 14. 15.

Le Barometre a été:

2 Jours entre	26″,	10‴	—	12‴,	le 22. & 23.
0 - - -	27″,	0	—	2.	
1 - - -		2	—	4,	le 24.
1 - - -		4	—	6,	le 25.
3 - - -		6	—	8,	le 1. 2. 26.
4 - - -		8	—	10,	le 3—5. 30.
4 - - -		10	—	12,	le 8. 11. 12. 21.
5 - - -	28,	0	—	2,	le 9. 10. 13. 17. 18.
6 - - -		2	—	4,	le 6. 15. 20. 27—29.
4 - - -		4	—	6,	le 7. 14. 16. 19.

On n'avoit peut-être jamais vû tomber le barometre auſſi bas, & auſſi ſubitement qu'il a fait le 22 de ce mois; en ſoixante heu-

res à peu près il descendit depuis 28 pouces 4½ lignes à 26 pouces 11½ lignes; après une chûte si extraordinaire de 17 lignes de Paris, il est resté pendant deux jours au même degré de chûte, & n'est revenu que le 28. par une gradation lente de cinq jours au point d'où il étoit tombé. Le thermometre dans tout ce tems là n'a pas varié de plus de deux degrés, c. à d. du 5 au 3. Le vent a toujours été autour de la plage du Sud, & le plus souvent très foible, du moins dans nos contrées. Il n'y a eû ni pluies, ni ouragans. En un mot nulle cause sensible n'avoit annoncé, & nul effet remarquable n'a suivi ce changement subit & prodigieux du poids de l'atmosphere.

Le Thermometre a été à midi:

4 Jours entre les degrés 2 — 4, le 7. 8. 13. 14.
20 - - - - - - - - 4 — 6, le 1. 6. 9—12. 15—28.
4 - - - - - - - - 6 — 8, le 2. 3. 29. 30.
2 - - - - - - - - 8 — 10, le 4. 5.

DÉCEMBRE 1768.

La direction du vent.

1 Jour N. le 10.
3 - - N.E. le 11. 12. 14.
5 - - E. le 13. 15—17. 23.
4 - - S. E. le 3. 18. 24. 25.
6 - - S.W. le 4. 19. 20. 22. 30. 31.
10 - - W. le 1. 2. 5—7. 21. 26—29.
2 - - N.W. le 8. 9.
Six jours de *vents forts*, le 1. 14. 16. 26—28.

La

La température de l'air.

7	Jours ſereins,	le 7. 10. 16. 23—25. 31.
12	- - à moitié couverts,	le 2—6. 8. 11. 15. 17. 18. 22. 30.
12	- - couverts,	le 1. 9. 12—14. 19—21. 26—29.
2	- - pluvieux,	le 26. 27.
2	- - de neige,	le 12. 13.
3	- - de bruine,	le 8. 9. 19.
1	- - de brouillard,	le 2.
4	- - de gelée blanche,	le 3. 4. 6. 7.
12	- - de gelée,	le 10—18. 20. 23. 24.

Le Barometre a été:

1	Jour entre	27'', 6 — 8''',	le 1.
0	- - - -	8—10.	
3	- - - -	10—12,	le 2. 3. 29.
7	- - - -	28, 0 — 2,	le 4. 16—18. 27. 30. 31.
6	- - - -	2 — 4,	le 15. 19—21. 26. 28.
14	- - - -	4 — 5,5,	le 5—14. 22—25.

Le Thermometre a été à midi:

5	Jours entre les degrés	—4 & —2,	le 13—17.
2	- - - - - - -	—2 & 0,	le 12. 18.
3	- - - - - - -	0 & +2,	le 9—11.
11	- - - - - - -	+2 & +4,	le 6—8. 19. 20. 22—25. 27. 28.
9	- - - - - - -	+4 & +6,	le 2—5. 21. 26. 29—31.
1	- - - - - - -	+6 & +8,	le 1.

Aurores

Aurores boréales en 1768.

La ſeule remarquable eſt celle du 5 Décembre. A cinq heures & demie du ſoir le ciel parut en feu vers le N. E. au point qu'on crut voir un incendie. Il n'y avoit que quelques nuages à l'horizon, & les étoiles de la premiere grandeur étoient très viſibles. Cette couche de feu s'élevoit juſqu'à près de 30 degrés au deſſus de l'horizon, & elle occupoit un pareil eſpace en amplitude. Inſenſiblement ce phenomene s'étendit par le Nord au N. W. & alors on s'apperçut clairement que c'étoit la lumiere boréale, qui embraſſa enfin au delà de la moitié de l'horizon depuis le S. E. vers le N. E. par le Nord; & qui s'éleva au deſſus du zénith de près de 10 degrés vers le Midi. Entre les colonnes ou gerbes enflammées, paroiſſoient d'eſpaces en eſpaces des colonnes presque verticales d'une couleur blanche ſemblable à celle des aurores boréales ordinaires. Mais je n'ai pas obſervé les vibrations qui accompagnent régulierement celles-ci. A meſure que cette lumiere avançoit vers l'Oueſt, elle diſparut vers le Nord-Eſt; & au bout d'une heure il ne reſta qu'une lumiere boréale ordinaire du côté du Nord, qui occupoit l'horizon depuis le Nord juſqu'à l'Oueſt, & qui s'élevoit à peu près à 25 degrés. Les nuages l'interceptoient en pluſieurs endroits, & ne permettoient pas d'en voir toute l'étendue.

TABLEAU

TABLEAU

des hauteurs barométriques extremes & moyennes de chaque mois; pour l'Année 1769.

Mois	Jours	le plus haut degré	Jours	le plus bas degré	variation totale	le milieu	hauteur moyenne
Janv.	le 5.9.15.18.27	28''.3''',5	le 29	27''.2''', 5	13'''	27''. 9	28''.0, 6
Fevr.	le 20	28. 3, 5	le 8	27. 2, 5	13	27. 9	27.10, 3
Mars	le 26	28. 5	le 12	27. 8, 5	8, 5	28. 0,75	28. 1,18
Avril	le 26	28. 5, 5	le 11	27. 6, 5	11	28. 0	28. 0,22
Mai	le 2	28. 5	le 11	27. 6, 5	10, 5	28. 0	27.11,73
Juin	le 8	28. 3, 5	le 17	27. 7, 5	8	27. 11, 5	27.11, 9
Juillet	le 4	28. 4, 5	le 29	27. 5, 5	11	27. 11	28. 0,76
Août	le 2	28. 2	le 20	27. 7, 5	6, 5	27. 10,75	27.11,94
Sept.	le 3. 18. 19	28. 4, 5	le 25	27. 5	11, 5	27. 10,75	27.11,81
Oct.	le 14. 15	28. 6, 5	le 31	27. 7, 5	9, 5	28. 1,75	28. 2,12
Nov.	le 12	28. 5	le 15	27. 4, 75	12, 25	27. 10, 8	27.10, 3
Déc.	le 4	28. 6, 5	le 24	27. 0, 25	18, 25	27. 9, 5	28. 0,35
Année entiere		28''.6''',5		27''.0''',25	18''',25	27''.11,06	28''.0''',1

Remarque.

On sera peut-être surpris que la hauteur moyenne du barometre soit à Berlin de 28 pouces & $\frac{1}{10}$ de ligne de Paris, tandis qu'on ne l'estime même au niveau de la mer que de 28 pouces. Mais 1°. cette hauteur moyenne n'est que celle de l'année 1769; peut-être sera-t-elle moindre dans d'autres années. 2°. Les hauteurs barométriques absolues dépendent beaucoup de la bonne construction du barometre, & de la qualité du mercure. 3°. L'effet de la dilatation due à la cha-

leur n'eſt pas déduit des hauteurs obſervées. Enfin il n'eſt pas bien ſûr que la hauteur moyenne du barometre à la mer ne ſoit que de 28 pouces. Mr. l'Abbé Chappe l'a déterminée par diverſes obſervations à 28 pouces 1, 5 lignes.

TABLEAU

des hauteurs thermométriques extremes & moyennes de chaque mois, pour l'Année 1769 à midi.

Mois	Jours	le plus haut degré	Jours	le plus bas degré	différence totale	le milieu	chaleur moyenne
Janvier	le 13	+ 5^{d},	le 31	− 6^{d}	11^{d},	− 0^{d}, 5	+ 1^{d},58
Fevrier	le 28	+ 9	le 4	− 7,5	16, 5	+ 0,75	+ 1,78
Mars	le 15	+10	le 30	+ 1	9	+ 5, 5	+ 4, 7
Avril	le 14	+16	le 7	+ 2,5	13, 5	+ 9,25	+ 9,95
Mai	le 28	+21, 5	le 7	+ 3,5	18	+12, 5	+12, 3
Juin	le 6	22, 5	le 21	11	11, 5	+16,75	+16
Juillet	le 19	22, 5	le 30	11	11, 5	+16,75	+17, 4
Août	le 6	23, 5	le 20	13	10, 5	+18,25	+17,08
Septembre	le 1	21, 5	le 26	7,5	14	+14, 5	+14, 6
Octobre	le 31	12, 5	le 24	+ 2	10, 5	+ 7,25	+ 6, 3
Novembre	le 1	+11, 5	le 19	− 1,5	13	+ 5	+ 4,08
Décembre	le 24	+ 6,25	le 10	− 2	8,25	+ 2	+ 4, 2
Année entiere		+23, 5		− 7,5	31	+ 9,04	+ 9,16

Le

Le même Tableau pour l'heure du matin & du soir.

Mois	Jours	le plus haut degré	Jours	le plus bas degré	différence totale	le milieu	chaleur moyenne
Janvier	le 13	+ 3d.	le 31	—10, 5d	13, 5	— 3,75	+ 0,76
Fevrier	le 28	+ 3	le 2	— 9	12	— 3	— 0,23
Mars	le 15	+ 4,5	le 30	— 2	6, 5	+ 1,25	+ 2, 2
Avril	le 14	+11	le 7	+ 2	13	+ 4, 5	+ 5, 8
Mai	le 28	+16	le 7	+ 3, 5	12, 5	+ 9,75	+ 8, 7
Juin	le 6	+15	le 21	+ 8	7	+11, 5	+11, 6
Juillet	le 18	+17	le 10	+ 9, 5	7, 5	+13,25	+13
Août	le 6	+17,5	le 23	+ 9	8, 5	+13,25	+11,28
Septembre	le 1	+15	le 26	+ 7, 5	7, 5	+11,25	+10, 4
Octobre	le 31	+ 7,5	le 24	— 2	9, 5	+ 2,75	+ 3, 4
Novembre	le 1	+ 8,5	le 19	— 5	13, 5	+ 1,75	+ 2,08
Décembre	le 20	+ 5,5	le 10	— 5,75	11,25	— 0,12	+ 2,15
Année entiere		+17,5		—10, 5	28d.	+ 5,05	+ 5,96

OBSERVATIONS
plus détaillées sur chaque mois.

JANVIER 1769.
La direction du vent.

2 Jours N. le 9. 29.
3 - - N.E. le 4. 8. 19.
9 - - E. le 5. 6. 10. 16. 20. 21. 24—26.
3 - - S.E. le 7. 22. 23.
4 - - S.W. le 1. 2. 3. 27.
7 - - W. le 11—15. 17. 28.
2 - - N.W. le 18. 30.

Cinq jours de *vents forts*, le 12. 13. 19. 29. 30.

 La

La température de l'air.

2 Jours fereins, le 1. 31.
5 - - à moitié couverts, le 3. 13. 16. 17. 30.
22 - - couverts, le 2. 4—12. 14. 15. 18. 19. 21—28.
3 - - nébuleux, le 6. 7. 25.
5 - - pluvieux, le 11. 12. 19. 28. 29.
4 - - de neige, le 19. 20. 29. 30.
3 - - de bruine, le 4. 5. 8.
1 - - de gelée blanche. le 10.
8 - - de gelée, le 11. 16. 20. 21. 23. 25. 30. 31.

Le Barometre a été:

1 Jour entre 27'', 2 — 4''', le 29.
1 - - - 8—10, le 30.
7 - - - 10—12, le 2. 3. 11—14. 31.
7 - - - 28, 0 — 2, le 1. 6. 7. 20—22. 28.
15 - - - 2— 4, le 4. 5. 8—10. 15—19. 23—27.

NB. Le 29. le mercure avoit defcendû en 48 heures de 13 lignes, le vent qui le 27 étoit à l'Eft, paffa le 28 au Sud-Oueft; le 29 à l'Oueft, accompagné de pluie, de neige & d'ouragan. Le 30 il devint Nord-Nord-Eft, avec bourasque, neige abondante, & forte gelée.

Le Thermometre a été à midi:

2 Jours entre les degrés — 6 & —4, le 30. 31.
1 - - - - - - - - — 4 & —2, le 21.
16 - - - - - - - - 0 & +2, le 5—11. 18—20. 22—27.
11 - - - - - - - - + 2 & +4, le 1—4. 12. 14—17. 28. 29.
1 - - - - - - - - + 4 & +6, le 13.

FEVRIER

FEVRIER 1769.

La direction du vent.

2 jours N.E. le 11. 15.
8 - - E. le 1. 2. 4. 10. 12—14. 24.
4 - - S.E. le 3. 16—18.
1 - - S. le 22.
9 - - S.W. le 5—9. 23. 26—28.
3 - - W. le 20. 21. 25.
1 - - N.W. le 19.

Cinq jours de *vents forts*, le 7. 8. 9. 25. 26.

La température de l'air.

1 Jour ſerein, le 2.
8 Jours à moitié couverts, le 3. 6. 8. 9. 15. 17. 21. 24.
18 - - couverts, le 1. 4. 5. 10—14. 16. 18—20. 22. 23. 25—28.
4 - - nébuleux, le 11. 18—20.
5 - - pluvieux, le 7. 8. 22. 26. 28.
7 - - de neige, le 4. 7. 8. 16. 20. 23. 25.
3 - - de bruine, le 18. 19. 23.
6 - - de forte gelée, le 1—5. 15.

Le Barometre a été:

1 jour entre 27'', 2 — 4''', le 8.
0 - - - - 4 — 6.
6 - - - - 6 — 8, le 7. 9. 10. 23. 24. 26.
5 - - - - 8 — 10, le 5. 6. 11. 25. 27.
5 - - - - 10 — 12, le 3. 4. 12. 22. 28.
4 - - - - 28, 0 — 2, le 1. 13. 17. 18.
7 - - - - 2 — 4, le 2. 14. 15. 16. 19. 20. 21.

NB. Quarante huit heures avant la grande chute du barometre il y avoit eu un tremblement de terre à Lisbone le 6 Fevrier à 3 heures après-midi; le vent reſta Sud-Oueſt du 5 au 9. Mais il ſe renforça dès le 7 à midi, & devint variable le 8.

Le Thermometre a été à midi :

1 jour entre les degrés — 8 & — 6, le 4.
1 - - - - - - - - — 6 & — 4, le 2.
3 - - - - - - - - — 4 & — 2, le 1. 3. 5.
2 - - - - - - - - — 2 & 0, le 14. 15.
7 - - - - - - - - 0 & + 2, le 6. 10 — 13. 16. 25.
9 - - - - - - - - + 2 & + 4, le 7 — 9. 17 — 20. 24. 26.
4 - - - - - - - - + 4 & + 6, le 21. 22. 23. 27.
0 - - - - - - - - + 6 & + 8.
1 - - - - - - - - + 8 & + 10, le 28.

MARS 1769.

La direction du vent.

6 Jours N.E. le 9. 10. 25. 28 — 30.
2 - - E. le 26. 27.
6 - - S. E. le 8. 11 — 14. 31.
8 - - S.W. le 1. 2. 5. 6. 15. 18. 20. 24.
6 - - W. le 3. 4. 7. 16. 19. 21.
3 - - N.W. le 17. 22. 23.

Trois jours de *vents forts*, le 1. 3. 17.

Un *jour* de *gros vent* N.W. la nuit du 21. au 22. le barometre tomba de 28'', 3''' à 28'', 0''', 5.

La température de l'air.

4 Jours sereins, le 5. 15. 29. 30.
10 - - à moitié couverts, le 1 — 3. 6. 8. 12. 13. 16. 21. 28.
17 - - couverts, le 4. 7. 9 — 11. 14. 17 — 20. 22 — 27. 31.
2 - - nébuleux, le 11. 12.
13 - - pluvieux, le 1. 2. 7 — 10. 16 — 19. 22 — 24.
6 - - de neige, le 7 — 10. 25. 31.
4 nuits de gelée, le 26. 29 — 31.
1 - - de gelée blanche, le 21.

Le

Le Barometre a été:

1 Jour entre 27'', 8 à 10''', le 12.
4 Jours - 10 à 12, le 1. 7. 11. 13.
13 - - - 28, 0 à 2, le 2. 6. 8—10. 14. 16—19. 22. 24. 31.
8 - - - 2 à 4, le 3. 5. 15. 20. 21. 23. 25. 30.
5 - - - 4 à 5, le 4. 26—29.

Le Thermometre a été à midi:

4 Jours entre les degrés 0 & + 2, le 7. 9. 29. 30.
8 - - - - - - - 2 & 4, le 10. 11. 22. 23. 25—27. 31.
10 - - - - - - - 4 & 6, le 3. 4. 8. 12. 18—21. 24. 28.
7 - - - - - - - 6 & 8, le 1. 2. 6. 13. 14. 16. 17.
2 - - - - - - - 8 & 10, le 5. 15.

AVRIL 1769.

La direction du vent.

7 Jours N.E. le 2—7. 21.
7 - - E. le 1. 8. 22—26.
5 - - S.E. le 17. 19. 20. 27. 28.
6 - - S.W. le 9. 10. 11. 13. 14. 29.
5 - - W. le 12. 15. 16. 18. 30.
Deux jours de *vents forts*, le 5. 27.

La température de l'air.

11 jours ſereins, le 8. 13. 21. 23—30.
9 - - à moitié couverts, le 6. 7. 10. 12. 16. 18—20. 22.
10 - - couverts, le 1—5. 9. 11. 14. 15. 17.
7 - - pluvieux, le 2. 3. 4. 9—11. 17.
2 nuits de gelée, du 6 au 7, & du 7 au 8.

Le

Le Barometre a été:

1 Jour entre	27″, 6 à 8‴,	le 11.	
2 Jours - -	8 à 10,	le 9. 10.	
12 - - -	10 à 12,	le 1—8. 12. 14. 15. 17.	
4 - - -	28, 0 à 2,	le 13. 16. 18—20.	
5 - - -	2 à 4,	le 21. 23. 24. 29. 30.	
5 - - -	4 à 6,	le 22. 25—28.	

NB. Il tomba le 8. & les trois jours suivans une pluie si abondante en Portugal, que le Tage forma par son débordement de vastes inondations; ce même jour le barometre descendit ici de 3 lignes, & il continua de descendre jusqu'au 11me jour où il fut au plus bas de tout le mois. C'est dans ce même intervalle du 8 au 11 que le vent constant d'Est devint tout à coup le 9 Sud-Ouest. Il y avoit eu le 7 un tremblement de terre à Lisbonne, & le 6 une éruption du mont Hecla.

Le Thermometre a été à midi:

3 Jours entre les degrés	+ 2 & + 4,	le 1. 2. 8.
3 - - - - - - - -	4 & 6,	le 3. 4. 7.
3 - - - - - - - -	6 & 8,	le 5. 6. 9.
2 - - - - - - - -	8 & 10,	le 21. 22.
7 - - - - - - - -	10 & 12,	le 10. 15—17. 23. 25. 26.
11 - - - - - - - -	12 & 14,	le 11—13. 18—20. 24. 27—30.
1 - - - - - - - -	14 & 16,	le 14.

Mai 1769.

La direction du vent.

5 Jours N.E. le 2. 10. 14. 15. 18.
5 - - E. le 12. 16. 21—23.
5 - - S.E. le 9. 24—26. 28.
6 - - S.W. le 3. 17. 19. 20. 29. 31.
1 - - W. le 5.
9 - - N.W. le 1. 4. 6—8. 11. 13. 27. 30.
Sept jours de vents *forts*, le 1. 3. 6. 7. 12. 26. 31.

La température de l'air.

8 Jours sereins, le 8. 9. 18. 22—25. 28.
12 - - à moitié couverts, le 2. 4. 12—14. 16. 17. 19. 26. 27. 30. 31.
11 - - couverts, le 1. 3. 5—7. 10. 11. 15. 20. 21. 29.
15 - - pluvieux, le 1. 3. 5—7. 10—13. 17. 20. 21. 26. 29. 31.
1 - - d'orage, le 31. Cet orage passa au S. W. de Berlin, & fut très violent aux environs de Vittemberg, où la grêle abima les vignes.

Le Barometre a été:

1 Jour entre	27″,	6 à 8‴,	le 11.
3 Jours -		8 à 10,	le 10. 12. 29.
15 - - -		10 à 12,	le 6—9. 13—20. 28. 30. 31.
5 - - -	28,	0 à 2,	le 1. 21. 25—27.
6 - - -		2 à 4,	le 3—5. 22—24.
1 - - -		4 à 5,	le 2.

Le Thermomètre a été à midi:

1 Jour entre les degrés	+ 2 & + 4,	le 7.	
1 - - - - - - - -	4 & 6,	le 1.	
4 Jours - - - -	6 & 8,	le 3. 4. 10. 11.	
7 - - - - - - - -	8 & 10,	le 2. 5. 6. 8. 9. 12. 15.	
2 - - - - - - - -	10 & 12,	le 14. 16.	
3 - - - - - - - -	12 & 14,	le 13. 17. 21.	
3 - - - - - - - -	14 & 16,	le 20. 22. 27.	
5 - - - - - - - -	16 & 18,	le 18. 19. 29—31.	
3 - - - - - - - -	18 & 20,	le 23. 25. 26.	
2 - - - - - - - -	20 & 22,	le 24. 28.	

JUIN 1769.

La direction du vent.

2 Jours NE. le 29. 30.
1 - - E. le 15.
2 - - S.E. le 5. 24.
10 - - S.W. le 1. 4. 6—10. 18. 21. 25.
6 - - W. le 2. 11—13. 19. 26.
9 - - N.W. le 3. 14. 16. 17. 20. 22. 23. 27. 28.
Quatre jours de vents *forts*, le 2. 18. 20. 21.

La température de l'air.

3 Jours sereins, le 12. 23. 24.
15 - - à moitié couverts, le 3—5. 7—10. 15—18. 26. 27. 29. 30.
11 - - couverts, le 1. 2. 6. 11. 13. 14. 20—22. 25. 28.
18 - - pluvieux, le 1. 4. 7. 9—11. 13. 14. 16. 18. 19. 21. 22. 25—29.
dont *onze* de pluie abondante, le 10. 11. 14. 16. 19. 21. 22. 25. 27—29.

Le

Le Barometre a été:

1 Jour entre 27'', 6 à 8''', le 17.
3 Jours - 8 à 10, le 18. 19. 29.
5 - - - - 10 à 12, le 15. 16. 22. 28. 30.
14 - - - 28, 0 à 2, le 1—3. 6. 10. 11. 14. 20. 21. 23—27.
7 - - - 2 à 4, le 4. 5. 7—9. 12. 13.

Le Thermometre a été à midi:

3 Jours entre les degrés 11 & 12, le 14. 16. 21.
4 - - - - - - - 12 & 14, le 19. 20. 22. 23.
10 - - - - - - - 14 & 16, le 2—4. 11. 12. 15. 17. 26—29.
5 - - - - - - - 16 & 18, le 1. 5. 13. 18. 25.
3 - - - - - - - 18 & 20, le 8. 24. 30.
4 - - - - - - - 20 & 22½, le 6. 7. 9. 10.

Ce mois a été exemt d'orages.

JUILLET 1769.

La direction du vent.

3 Jours N.E. le 3. 23. 25.
4 - - E. le 20—22. 24.
2 - - S.E. le 16. 17.
2 - - S.W. le 18. 19.
6 - - W. le 4. 15. 28—31.
14 - - N.W. le 1. 2. 5—14. 26 27.
Dix jours de *vents forts*, le 1. 2. 6. 7. 22. 23. 28—31.

La température de l'air.

3 Jours sereins, le 4. 5. 16.
19 - - à moitié couverts, le 2.3.6-11. 15.17.19.20. 22-25. 27.28.31.
9 - - couverts, le 1. 12—14. 18. 21. 26. 29. 30.
15 - - pluvieux, le 1.2.8.9. 12.14.17.18.20.22.23.26.28.29.30.
dont *dix* de pluie copieuse, le 9.12.17.18.21.23.28—30.
5 - - de tonnere, le 17. 18. 20. 23. 24.
4 - - d'éclairs au loin sans tonnere, le 12. 21. 22. 25.

Le Barometre a été:

1 Jour entre 27″, 6 à 8‴, le 29.
1 - - - - 8 à 10, le 30.
4 - - - - 10 à 12, le 9. 22. 28. 31.
16 - - - - 28, 0 à 2, le 1. 2. 7. 8. 10. 11. 17—21. 23—27.
7 - - - - 2 à 4, le 3. 6. 12—16.
2 - - - - 4 à 5, le 4. 5.

Le Thermometre a été à midi:

1 Jour entre les degrés 11 & 12, le 30.
4 Jours - - - - - 12 & 14, le 1. 10. 29. 31.
6 - - - - - - - - 14 & 16, le 2. 7. 9. 11. 26. 28.
5 - - - - - - - - 16 & 18, le 3. 6. 8. 13. 27.
6 - - - - - - - - 18 & 20, le 4. 12. 14. 15. 21. 22.
9 - - - - - - - - 20 & 22½, le 5. 16—20. 23—25.

AOUT 1769.

La direction du vent.

5 Jours S.E. le 10. 12. 22. 23. 30.
3 - - S. le 25—27.
8 - - S.W. le 6. 7. 13. 15. 20. 21. 28. 31.
6 - - W. le 8. 9. 11. 14. 24. 29.
9 - - N.W. le 1—5. 16—19.
Neuf jours de *vents forts*, le 3. 7. 9. 14. 20. 21. 27. 28. 31.

La

La température de l'air.

3 Jours fereins, le 10. 15. 25.
16 - - à moitié couverts, le 1.3.5.6.9.13.14.19-22.24.26.27.30.31.
12 - - couverts, le 2.4. 7. 8. 11. 12. 16—18. 23. 28. 29.
15 - - pluvieux, le 7. 8. 11—14. 16. 18—20. 23. 24. 27—29.
3 - - de tonnere, le 8. 20. 24.

Le Barometre a été:

4 Jours entre 27'', 8 à 10''', le 20—23.
6 - - - 10 à 12, le 13. 14. 16—18. 24.
21 - - - 28, 0 à 2, le 1—12. 15. 19. 25—31.

Le Thermometre a été à midi:

3 Jours entre les degrés 12 & 14, le 19. 20. 23.
10 - - - - - - - 14 & 16, le 1.2.11.13.16.18.21.22.24.29.
13 - - - - - - - 16 & 18, le 3.4.8.9.12.14.15.17.25-28.30.
2 - - - - - - - 18 & 20, le 7. 10.
2 - - - - - - - 20 & 22, le 5. 31.
1 - - - - - - - 22 & 24, le 6.

SEPTEMBRE 1769.

La direction du vent.

5 Jours S.E. le 4. 5. 7. 10. 18.
2 - - S. le 19. 28.
8 - - S.W. le 1. 6. 8. 11. 12. 14. 20. 23.
9 - - W. le 2. 9. 15. 16. 24—27. 29.
6 - - N.W. le 3. 13. 17. 21. 22. 30.
Dix jours de *vents forts*, le 12. 13. 15—17. 23. 26. 27. 29. 30.
Deux jours de *vents très forts*, le 24. 25.

La température de l'air.

12 jours presque ſereins, le 3—5. 9. 10. 14. 16. 18—20. 23. 24.
9 - - à moitié couverts, le 1. 6. 7. 13. 15. 17. 25. 26. 29.
9 - - couverts, le 2. 8. 11. 12. 21. 22. 27. 28. 30.
13 - - pluvieux, le 2. 8. 11. 13—15. 22—27. 29. 30.
dont *quatre* de pluies abondantes, le 8. 22—24.
2 - - nébuleux, le 7. 28.
1 - - d'éclairs ſans tonnere, le 1.

Le Barometre a été:

1 Jour entre 27'', 5 à 6''', le 25.
2 Jours - - 6 à 8, le 11. 12.
3 - - - 8 à 10, le 13. 24. 26.
7 - - - 10 à 12, le 6—8. 10. 15. 22. 23.
10 - - - 28, 0 à 2, le 1. 5. 9. 14. 16. 21. 27—30.
4 - - - 2 à 4, le 2. 4. 17. 20.
3 - - - 4 à 5, le 3. 18. 19.

NB. Le 25, jour de la plus grande chûte du barometre, il y avoit eû un tremblement de terre aux environs du Rhin du côté de Gernsheim à 7 heures du matin. Le barometre à cette heure là étoit ici à 27'', 8 lignes; à midi il étoit deſcendu à 27'', 5'''; ce jour & le précédent le vent d'Oueſt fut véhément.

Le Thermometre a été à midi:

1 jour entre les degrés 6 & 8, le 26.
1 - - - - - - - 8 & 10, le 25.
4 - - - - - - - 10 & 12, le 23. 24. 27. 30.
7 - - - - - - - 12 & 14, le 12. 13. 16. 17. 22. 28. 29.
5 - - - - - - - 14 & 16, le 11. 14. 15. 18. 21.
7 - - - - - - - 16 & 18, le 2. 3. 7—9. 19. 20.
4 - - - - - - - 18 & 20, le 4—6. 10.
1 - - - - - - - 20 & 22, le 1.

Octobre

OCTOBRE 1769.

La direction du vent.

1 Jour N. le 10.
5 Jours N.E. le 1. 12. 14. 22. 23.
13 - - E. le 2—9. 15—18. 24.
2 - - S.E. le 29. 30.
1 - - S. le 19.
2 - - S.W. le 20. 31.
3 - - W. le 11. 26. 28.
4 - - N.W. le 13. 21. 25. 27.
Six jours de *vents un peu forts*, le 6. 9. 13. 22. 25. 27.

La température de l'air.

5 Jours sereins, le 15—18. 20.
10 - - à moitié couverts, le 10. 11. 13—15. 24—26. 30. 31.
15 - - couverts, le 1—9. 21—23. 27—29.
6 - - nébuleux, le 18. 19. 22. 29—31.
10 - - pluvieux, le 4. 6. 10—12. 21. 25. 27—29.
1 - - de petite neige, le 4.
2 - - de gelée blanche. le 18. 26.
1 nuit de gelée, du 14 au 15.

Le Barometre a été:

1 Jour entre	27″,	7	à	8‴,	le 31.
1 - - -		8	à	10,	le 30.
3 - - -		10	à	12,	le 8. 9. 29.
6 - - -	28,	0	à	2,	le 7. 10. 21. 22. 27. 28.
11 - - -		2	à	4,	le 1—6. 11. 20. 23. 25. 26.
6 - - -		4	à	6,	le 12. 16—19. 24.
3 - - -		6	à	7,	le 13—15.

Le

Le Thermometre a été à midi :

4 Jours entre les degrés 2 & 4, le 6. 23. 24. 29.
10 - - - - - - - - 4—6, le 2—5. 7. 14. 15. 19. 26. 28.
10 - - - - - - - - 6—8, le 1. 8. 11—13 16. 18. 25. 27. 30.
5 - - - - - - - - 8—10, le 9. 10. 17. 21. 22.
2 - - - - - - - - 10—12,5, le 20. 31.

NOVEMBRE 1769.

La direction du vent.

5 Jours N.E. le 11. 16—18. 20.
1 - - E. le 10.
2 - - S. E. le 12. 19.
1 - - S. le 13.
6 - - S.W. le 2. 3. 8. 23. 24. 29.
8 - - W. le 1. 4—6. 14. 20—22.
7 - - N.W. le 7. 9. 15. 25—28.
Cinq jours de *vents forts*, le 24—27. 29.

La température de l'air.

4 Jours sereins, le 11. 12. 19. 28.
13 - - à moitié couverts, le 1—5. 7—9. 14. 16. 18. 22. 27.
13 - - couverts, le 6. 10. 13. 15—17. 20. 21. 23—26. 29. 30.
16 - - pluvieux, le 1. 4—8. 13—15. 23—27. 29. 30.
5 - - de neige, le 16. 23. 25—27.
1 - - de grêle, le 25.
3 - - de brouillards, le 3. 8. 23.
5 - - de gelée, le 12. 16—19.

Le

Le Barometre a été:

2 Jours entre 27''. 4 à 6''', le 15. 25.
7 - - - - 6 à 8''', le 6—8. 14. 23. 27. 29.
5 - - - - 8 à 10, le 5. 9. 13. 24. 30.
8 - - - - 10 à 12, le 1—4. 16. 17. 22. 26.
2 - - - - 28, 0 à 2, le 16. 18.
4 - - - - 28'', 2 à 4, le 11. 19. 20.
2 - - - - 4 à 5, le 12. 28.

Le Thermometre a été à midi:

3 Jours entre les degrés —2 & 0, le 17—19.
9 - - - - - - - - 0 & +2, le 11. 12. 15. 16. 20. 22. 27. 28. 30.
7 - - - - - - - - 2 & 4, le 10. 13. 21. 23. 24. 26. 29.
1 - - - - - - - - 4 & 6, le 25.
1 - - - - - - - - 6 & 8, le 14.
7 - - - - - - - - 8 & 10, le 2. 3. 5—9.
2 - - - - - - - - 10 & 12, le 1. 4.

DÉCEMBRE, 1769.

La direction du vent.

3 jours N.E. le 1. 29. 30.
1 - - E. le 16.
5 - - S.E. le 6. 9. 10. 14. 15.
1 - - S. le 5.
11 - - S.W. le 3. 4. 7. 8. 11—13. 23. 24. 27. 31.
7 - - W. le 2. 17. 20—22. 25. 26.
3 - - N.W. le 18. 19. 28.
Trois jours de *vents forts*, le 18. 21. 26.
Quatre jours de *gros vents*, le 19. 24. 25. 27.

La température de l'air.

4 Jours sereins, le 1. 8—10.
4 - - à moitié couverts, le 11. 22. 23. 31.
16 - - couverts, le 2. 3. 7. 12. 15. 17. 18. 20. 21. 24—30.
7 - - nébuleux, le 4—6. 13. 14. 16. 19.
12 - - pluvieux, le 12. 13. 16—20. 23—27.
8 - - de neige, le 2. 18. 23. 26. 28—31.
3 - - de bruine, le 4. 5. 12.
2 - - de gelée blanche, le 9. & 10.
11 - - de forte gelée, le 1. 2. 6—10. 28—31.

Le Barometre a été:

1 jour entre	27″,	0 à 2‴,	le 24.
4 jours -		4 à 6,	le 19. 23. 26. 27.
2 - - -		6 à 8,	le 22. 25.
3 - - -		8 à 10,	le 20. 21. 28.
2 - - -		10 à 12,	le 17. 18.
3 - - -	28,	0 à 2,	le 15. 16. 29.
5 - - -		2 à 4,	le 2. 11—14.
9 - - -		4 à 6,	le 1. 3. 6—10. 30. 31.
2 - - -		6 à 7,	le 4. 5.

Le Thermometre a été à midi:

11 Jours entre les degrés	— 2 & 0,	le 1. 2. 6—10. 28—31.
9 - - - - - - - -	0 & + 2,	le 3—5. 11. 14. 15. 25—27.
6 - - - - - - - -	2 & 4,	le 12. 13. 16—18. 23.
5 - - - - - - - -	4 & 6½,	le 19—22. 24.

Aurores

Aurores boréales en 1769.

Entre les diverſes lumieres boréales qui ont paru cette année dans les mois de Septembre, Octobre, & Novembre, la plus conſidérable a été celle du 24 d'Octobre. Elle commença vers les ſept heures du ſoir; d'abord elle ne formoit qu'un ſegment circulaire, dont l'amplitude horizontale occupoit du N. E. vers l'Oueſt un arc d'environ 120°, & dont l'élévation alloit à 25°; les extrémités à l'Oueſt & au Nord-Eſt étoient d'un rouge enflammé. Vers les huit heures, la couleur de feu avoit diſparu, & l'on ne voyoit qu'une lumiere d'une très grande blancheur ſans vibrations ſenſibles.

A 9 heures le ſpectacle s'embellit; c'étoient des gerbes de lumiere coupées dans le ſens vertical en bandes paralleles rouges & blanches, qui toutes alloient ſe réunir vers un centre commun à 12 ou 15 degrés au dela du zenith. Les colonnes extrêmes à l'Oueſt & au N. E. formoient ſurtout de grandes maſſes enflammées. Un quart d'heure après, la lumiere n'atteignit plus le zenith; & ne parut plus ſi enflammée. On appercevoit néanmoins encore quelquefois des traces d'une lumiere blanche au delà du zenith.

Vers les 10 heures la lumiere étoit rentrée dans les premieres bornes quelle occupoit à 7 heures; le côté le plus enflammé étoit celui du Nord-Eſt. Le ſegment lumineux étoit d'un blanc clair; mais il paroiſſoit bordé d'un arc rougeâtre, d'où s'élevoient de tems en tems des gerbes enflammées, au N. N. E. juſqu'à la hauteur à peu près de 40 degrés.

A 10h. 25'. l'amplitude horizontale parut conſidérablement rétrécie du côté de l'Eſt; mais l'élévation s'étendoit de nouveau juſqu'au zenith, & le paſſoit même de quelques degrés; les gerbes enflammées s'élevoient le plus ſouvent juſqu'à la hauteur de l'étoile polaire, & c'étoit de la plage du Nord que partoient les plus hautes. Il en paroiſſoit cependant auſſi de tems en tems de très éclatantes vers l'Oueſt.

A 10^h. 40'. il régnoit encore au zenith, & quelques degrés au delà, une bordure rouge très sensible, qui se terminoit à l'horizon vers l'Ouest. Tout l'horizon du N.E. à l'Ouest par le Nord étoit très éclairé, mais sans jets, ni gerbes enflammées. Il sembloit que la plus grande masse de clarté s'avançât successivement du N.E. vers l'Ouest, à une hauteur de 8 à 10 degrés. De légers nuages interceptoient cette lumiere en divers endroits.

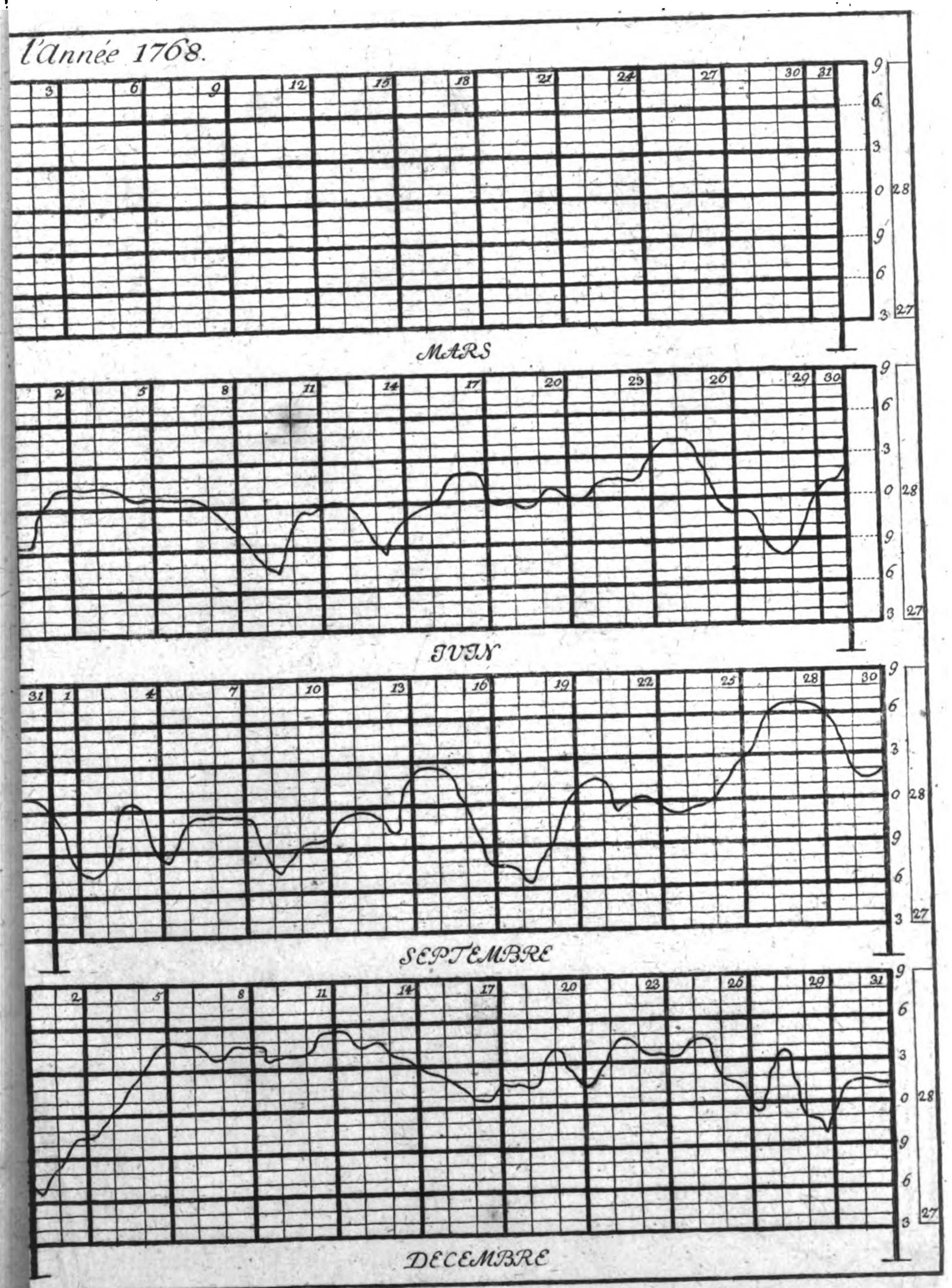
A 10^h. 48'. la bordure rouge du zenith avoit disparu; la plus grande clarté étoit au N.W.; elle occupoit jusqu'à 12 degrés en hauteur. On ne voyoit plus de colonnes lumineuses, & de gros nuages couvroient l'horizon.

A 11^h. 15'. la lumiere blanche n'étoit pas encore dissipée. Elle formoit un segment dont la flèche passoit par le N.N.W. & s'élevoit encore à 45 degrés.

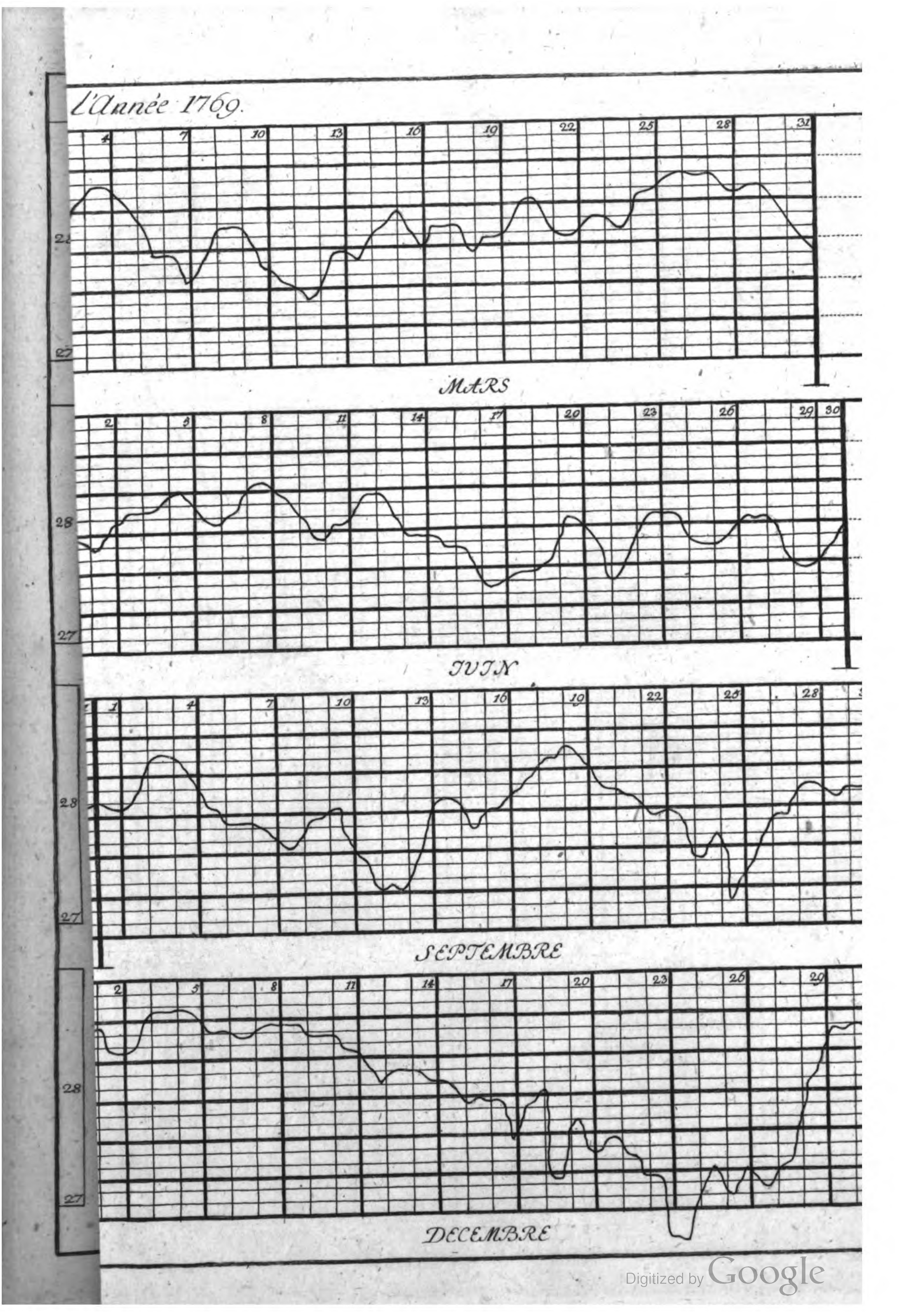
A minuit la corde du segment lumineux occupoit encore à peu près 80 degrés du N.N.E. au N.W. & la flèche passant par un vertical N.N.W. ne s'élevoit plus qu'à 12 ou 15 degrés.

Le 3 Novembre il y eut encore une aurore boréale avec des gerbes couleur de feu, qui partoient du N.N.W. puis du N.; mais la plus grande élevation à 10^h. ne fut que d'environ 30 degrés.

MÉMOIRES

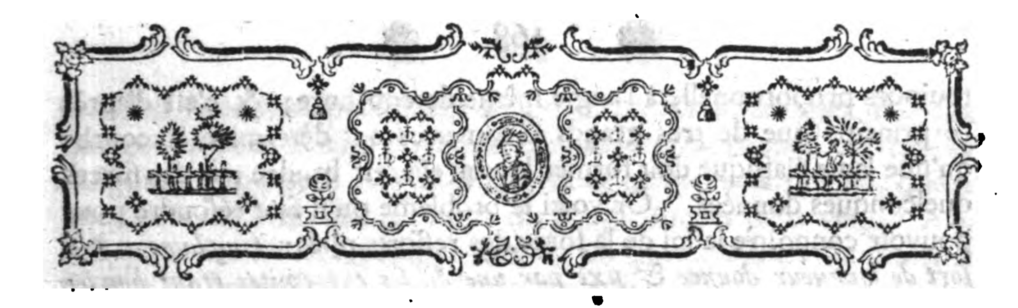


l'Année 1768.
3
6
9
12
15
18
21
24
27
30
31
MARS
2
5
8
11
14
17
20
23
26
29
30
JUIN
31
1
4
7
10
13
16
19
22
25
28
30
SEPTEMBRE
2
5
8
11
14
17
20
23
26
29
31
DECEMBRE
9
6
3
0
28
27


l'Année 1769.
4
7
10
13
16
19
22
25
28
31
28
27
MARS
2
5
8
11
14
17
20
23
26
29
30
28
27
JUIN
1
4
7
10
13
16
19
22
25
28
28
27
SEPTEMBRE
2
5
8
11
14
17
20
23
26
29
28
27
DECEMBRE

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE MATHÉMATIQUE.



SUR

LA FORCE DES RESSORTS PLIÉS.

PAR MR. DE LA GRANGE. (*)

On ſait que la force d'un reſſort plié s'affoiblit toujours à meſure que le reſſort ſe débande; mais on ignore la loi ſuivant laquelle ſe fait cet affoibliſſement; or c'eſt de cette loi que dépend la figure des fuſées que l'on applique aux montres & à la plupart des horloges à reſſort, & dont la propriété eſt de maintenir l'action du reſſort dans l'égalité au moyen de la différente grandeur des rayons qui forment la rainure ſpirale; car ſelon que la corde qui ſe deſentortille ſe trouve appliquée à une plus grande diſtance de l'axe de la fuſée, l'action du reſſort devient auſſi plus grande, & il faut que cette augmentation compenſe exactement la diminution de force que le reſſort ſouffre en ſe déroulant. Dans les reſſorts qui agiſſent en s'allongeant ou en ſe raccourciſſant il paroit que la force eſt proportionelle à la quantité dont ils ſe dilatent, ou ſe contractent, ou du moins à une fonction donnée de cette quantité: mais ce principe n'a pas lieu dans les lames élaſtiques inextenſibles & pliées en ſpirale telles que celles qu'on applique aux horloges; le ſeul principe qu'on puiſſe employer pour ces ſortes de reſſorts eſt que la force avec laquelle le reſſort réſiſte à être courbé eſt toujours

(*) Lû le 20 Sept. 1770.

toujours proportionelle à l'angle même de courbure; & c'est d'après ce principe que de très grands Géometres ont déterminé la courbe qu'une lame élastique doit former lorsqu'elle est bandée par des forces quelconques données. Or voici le probleme qu'il faut résoudre pour pouvoir connoître la loi de la force des ressorts pliés: *Une lame à ressort de longueur donnée & fixe par une de ses extrémités étant bandée par des forces quelconques qui agissent sur l'autre extrémité, & qui la retiennent dans une position donnée, déterminer la quantité & la direction de ces forces.* Ce probleme n'a encore été résolu, que je sache, par aucun Géometre; c'est ce qui m'a déterminé à en faire l'objet de ce Mémoire. La seule restriction que j'y mettrai c'est que la lame soit uniformement épaisse, & que sa figure primitive & naturelle soit la ligne droite. Ce n'est pas que le calcul ne puisse s'appliquer à des ressorts de figure & d'épaisseur quelconques, mais les équations qu'on auroit seroient trop compliquées pour qu'on en pût tirer quelque lumiere.

§. I.

Le principe ordinaire d'après lequel on résoud le probleme de la courbe élastique est, que la force du ressort à chaque point doit être proportionelle à la somme des momens de toutes les puissances tendantes. Or quoique ce principe paroisse n'avoir pas besoin de démonstration, cependant comme un très grand Géometre a cru pouvoir le révoquer en doute par cette considération qu'un ressort ne devant être regardé ni comme un corps parfaitement flexible ni comme un corps absolument inflexible, on ne sauroit se former une idée nette des momens des forces tendantes, momens qui, selon lui, ne peuvent avoir lieu que dans des corps absolument inflexibles, je vais tâcher d'abord d'établir la vérité de ce principe d'une maniere aussi simple que rigoureuse.

Planche VI. Fig. 1. Imaginons plusieurs verges droites & inflexibles AB, BC, CD, DE &c. lesquelles soient jointes l'une à l'autre par des charnieres à ressort aux points B, C, D &c. & dont la premiere

BA

BA soit fixée horizontalement au point A; & la derniere EF soit chargée au point F d'un poids quelconque P; on propose de trouver la figure du polygone ABCDEF. Pour cela je remarque que quelle que soit la maniere dont le ressort en B agit sur les deux verges AB, BC pour les étendre en ligne droite, on peut toujours substituer à l'action de ce ressort, celle d'un autre ressort Cc qui seroit attaché d'un côté au point C de la verge BC, & de l'autre au point c de la verge AB prolongée en c en sorte que $BC = Bc$, & qui auroit une force de contraction équivalente à la force du ressort de la charniere B. On pourra de même substituer aux ressorts des autres charnieres C, D &c. des ressorts Dd, Ee &c. qui agissent sur les points D, E &c. des verges CD, DE &c. & sur les points d, e &c. des verges BC, CD &c. prolongées en d, e &c. de maniere que $CD = Cd$, $DE = De$ &c. Cela posé, soit $AB = BC = Bc = CD = Cd$ &c. $= 1$, & soit la force du ressort en $B = F$, en $C = F'$; en $D = F''$ &c, la force du ressort $Cc = R$, celle du ressort $Dd = R'$, celle du ressort $Ee = R''$ &c.; enfin soit l'angle $CBc = \Phi$, l'angle $DCd = \Phi'$, l'angle $EDe = \Phi''$ &c. & la distance BK du point fixe B à la verticale KP suivant laquelle agit le poids tendant $= a$, la distance $C\lambda$ du point C à la même verticale $= a'$, la distance $D\mu = a''$ &c. il est évident que le ressort Cc agissant obliquement sur les lignes BC, Bc ne fait sur chacune de ces lignes qu'un effort égal à $R \cos\Phi$ pour les rapprocher l'une de l'autre, & comme cet effort doit être égal à celui du ressort placé en B, on aura $R \cos\Phi = F$; on prouvera de la même maniere qu'on aura $R' \cos\Phi' = F'$, $R'' \cos\Phi'' = F''$ &c. Considérons maintenant les deux verges BC, Bc comme mobiles en B & tirées l'une vers l'autre par le ressort Cc placé entre deux; qu'on prolonge ces deux verges jusqu'à la ligne verticale PK, & qu'on joigne les deux extrémités K & L par un ressort KL qui ait une force dilatative capable de faire équilibre à la force contractive du ressort Cc, il est aisé de prouver que si l'on nomme ϱ la force du ressort KL, on aura (à cause de $BC = Bc = 1$, $BK = a$ & KL perpen-

diculaire à BK) $\varrho a = R \cos\varphi$; donc, si on suppose que la force dilatative ϱ devienne contractive, le ressort KL sera équivalent au ressort Cc, & par conséquent aussi au ressort de la charniere B, pourvu que la force ϱ soit telle que $\varrho a = R \cos\varphi = F$. On peut prouver de même que l'on peut substituer au ressort Dd un autre ressort ML qui agisse aux extrémités M & L des verges BC, CD prolongées jusqu'à la verticale PK, & que la force de ce ressort que je dénoterai par ϱ' devra être déterminée par l'équation $\varrho' a' = R' \cos\varphi' = F'$. Nommant pareillement ϱ'' la force d'un ressort qu'on imagineroit placé aux extrémités M, & N des verges prolongées CD, DE, & qui seroit équivalent au ressort Ee, on trouveroit l'équation $\varrho'' a'' = R'' \cos\varphi'' = F''$; & ainsi de suite. On aura donc par ce moyen un assemblage de verges AK, BL, CM, DN &c. dont la premiere est fixe en A, & dont les autres sont mobiles autour des points B, C, D &c. & dont les extrémités K, L, M, N &c. sont unies par des ressorts KL, LM, MN &c. disposés en ligne droite, & qui sont en équilibre tant entr'eux qu'avec le poids P. Or il est visible que cet équilibre ne sauroit subsister à moins que les forces ϱ, ϱ', ϱ'' &c. des ressorts ne soient égales entr'elles, & égales aussi à la force du poids P; c'est pourquoi on aura nécessairement $\varrho = P$, $\varrho' = P$, $\varrho'' = P$ &c. donc $F = aP$, $F' = a'P$, $F'' = a''P$ &c. c'est à dire que les forces des ressorts qui agissent à chacun des angles du polygone ABCD &c. doivent être proportionelles aux momens du poids tendant par rapport à chacun de ces angles.

S'il y avoit plusieurs puissances tendantes, alors on démontreroit par un raisonnement semblable que le ressort à chaque angle du polygone devroit être proportionel à la somme des momens de toutes les puissances. Supposons maintenant que les verges qui forment le polygone élastique deviennent infiniment petites & que leur nombre augmente à l'infini, il est clair que le polygone se changera en une courbe continue, & que l'on aura le cas d'une lame élastique pliée, dans laquelle il faudra par conséquent que l'action du ressort à chaque

point

point soit proportionelle à la somme des momens des forces tendantes par rapport à ce point, comme on l'a toujours supposé.

A l'égard de l'action du ressort, c'est à dire, de la force avec laquelle il tend à se débander, on convient généralement qu'elle est en raison de l'angle de courbure, c'est à dire, en raison inverse du rayon osculateur; ainsi il faudra que la somme des momens des forces tendantes par rapport à chaque point de la courbe élastique soit réciproquement proportionelle au rayon osculateur lorsque l'élasticité absolue est partout la même, & lorsque l'élasticité est variable il faudra que la somme des momens dont il s'agit soit en raison directe de l'élasticité absolue, & en raison inverse du rayon osculateur.

§. II.

Soit donc ABC une lame élastique fixée par une de ses extrémités C, & courbée par des puissances quelconques qui agissent sur l'autre extrémité A. Ayant tiré par ce point A la tangente PAN, & par un point quelconque B de la courbe l'ordonnée BM perpendiculaire à la droite AN que nous prendrons pour l'axe des abscisses, on fera AM $= x$, MB $= y$, l'arc AB $= s$, le rayon de courbure en B $= \varrho$, l'angle que la tangente en B fait avec la tangente AN, c'est à dire, l'*amplitude* de l'arc AB $= \phi$, l'abscisse AN $= a$, l'ordonnée CN $= b$, l'arc AC, c'est à dire, la longueur de la lame $= l$, & l'angle que la tangente en C fait avec AN, c'est à dire, l'amplitude totale de l'arc AC $= m$; l'on aura Fig. 1.

$\mathrm{d}y = \sin\phi\,\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}x = \cos\phi\,\mathrm{d}s$, & $\frac{\mathrm{d}s}{\varrho} = \mathrm{d}\phi$; par conséquent $\varrho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\phi}$, $y = \int \sin\phi\,\mathrm{d}s$, $x = \int \cos\phi\,\mathrm{d}s$, ces intégrales étant prises de maniere qu'elles soient nulles lorsque $\phi = 0$.

Cela posé, on peut réduire en général toutes les forces qui agissent au point A à deux forces uniques dont l'une, que j'appellerai P,

agisse

agisse suivant la direction AP, & l'autre, que j'appellerai Q, agisse suivant AQ perpendiculaire à AP; or il est clair que la force P donne par rapport au point B le moment Py, & que la force R donne par rapport au même point le moment Qx; donc on aura par la nature de la courbe élastique (§. préc.) l'équation

$$Py + Qx = \frac{2K^2}{\varrho},$$

$2K^2$ étant un coëfficient constant qui dépend de l'élasticité absolue de la lame.

Substituons dans cette équation à la place de x, y, & ϱ leurs valeurs en φ, nous aurons

$$P\int \sin\varphi \, ds + Q\int \cos\varphi \, ds = \frac{2K^2 \, d\varphi}{ds},$$

où l'on remarquera qu'en faisant $\varphi = 0$, on aura $\int \sin\varphi \, ds = 0$, $\int \cos\varphi \, ds = 0$, & par conséquent aussi $\frac{d\varphi}{ds} = 0$.

Différentions maintenant cette équation en prenant ds constant, & l'on aura celle-ci

$$P \sin\varphi + Q \cos\varphi = \frac{2K^2 \, d^2\varphi}{ds^2},$$

laquelle étant multipliée par $d\varphi$, & ensuite intégrée, donnera

$$C - P \cos\varphi + Q \sin\varphi = \frac{K^2 \, d\varphi^2}{ds^2},$$

C étant une constante arbitraire qu'on déterminera par la condition qu'en faisant $\varphi = 0$ on ait $\frac{d\varphi}{ds} = 0$; c'est pourquoi on aura $C = P$.

On

On aura donc

$$\mathrm{d}s = \frac{K\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{(P - P\,\mathrm{cos}\,\phi + Q\,\mathrm{sin}\,\phi)}},$$

& de là

$$\mathrm{d}y = \frac{K\,\mathrm{sin}\,\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{(P - P\,\mathrm{cos}\,\phi + Q\,\mathrm{sin}\,\phi)}},$$

$$\mathrm{d}x = \frac{K\,\mathrm{cos}\,\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{(P - P\,\mathrm{cos}\,\phi + Q\,\mathrm{sin}\,\phi)}}.$$

Maintenant si on pouvoit intégrer ces trois équations, il est évident qu'en faisant après l'intégration $s = l$, $x = a$, $y = b$, & $\phi = m$, on auroit trois équations par lesquelles on pourroit déterminer les forces P, Q, & l'amplitude m, les quantités l, a, & b étant données; & le probleme seroit résolu: mais il est aisé de voir que l'intégration dont il s'agit dépend en général de la rectification des sections coniques, & qu'ainsi elle échappe à toutes les méthodes connues.

Il y a cependant un cas où l'intégration réussit; c'est celui où $Q = 0$; nous allons l'examiner dans le §. suivant.

§. III.

Supposons $Q = 0$, en sorte que la lame AC ne soit tirée au point A que par la force P suivant la direction de la tangente AP; on aura dans ce cas

$$\mathrm{d}s = \frac{K}{\sqrt{P}} \times \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{(1 - \mathrm{cos}\,\phi)}},$$

$$\mathrm{d}y = \frac{K}{\sqrt{P}} \times \frac{\mathrm{sin}\,\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{(1 - \mathrm{cos}\,\phi)}},$$

$$\mathrm{d}x = \frac{K}{\sqrt{P}} \times \frac{\mathrm{cos}\,\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{(1 - \mathrm{cos}\,\phi)}}.$$

 Faisons

Faisons pour plus de simplicité $\frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{P}} = f$, & mettons $2z$ à la place de ϕ, on aura à cause de $\cos 2z = 1 - 2\sin z^2$, $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, on aura, dis-je,

$$ds = \frac{f\,dz}{\sin z^2},$$

$$dy = 2f \cos z\, dz,$$

$$dx = \frac{f\,dz}{\sin z} - 2f \sin z\, dz,$$

d'où l'on tire par l'intégration

$$s = f \log. \sqrt{\left(\frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}\right)} + A,$$

$$y = 2f \sin z + B,$$

$$x = s + 2f \cos z + C,$$

A, B, C étant des constantes qui doivent être déterminées en sorte que s, x, & y soient nuls lorsque $z = 0$; ce qui donnera $B = 0$, $C = -2f$, & $A = -f\,l\,0$, c'est à dire $A = \infty$.

D'où l'on voit que ce cas ne sauroit avoir lieu à moins que l'angle z ne soit infiniment petit, pour que l'arc s puisse être fini; de sorte que la courbure de la lame sera infiniment petite.

Or, puisque $Q = 0$ donne $\Phi = 0$, il est clair que Q très petit donnera aussi ϕ très petit; donc faisant $\phi = Qu$, & supposant Q très petit, les équations du §. précédent deviendront, à cause de $\sin \phi = Qu$, & $\cos \phi = 1 - \frac{Q^2 u^2}{2}$ à très peu près

ds

$$ds = \frac{K\,du}{\sqrt{(u + \frac{P}{2}u^2)}},$$

$$dy = \frac{KQu\,du}{\sqrt{(u + \frac{P}{2}u^2)}},$$

$$dx = ds - \frac{KQ^2u^2\,du}{2\sqrt{(u + \frac{P}{2}u^2)}},$$

équations intégrables par les logarithmes lorsque P est positif, & par les arcs de cercle lorsque P est négatif.

Considérons ce dernier cas, & faisons pour plus de simplicité

$$u = \frac{\cos z - 1}{P},$$

on trouvera

$$ds = \frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{-P}}\,dz,$$

$$dy = \frac{QK\sqrt{2}}{2P\sqrt{-P}}(\cos z - 1)\,dz,$$

$$dx = ds + \frac{Q^2K\sqrt{2}}{4P^2\sqrt{-P}}\left(\frac{\cos 2z}{2} - 2\cos z + \frac{3}{2}\right)dz,$$

d'où, en intégrant en sorte que s, x, & y soient nuls lorsque $z = 0$, on aura

$$s = \frac{K\sqrt{2}}{\sqrt{-P}}\,z,$$

$y =$

$$y = \frac{QK\sqrt{2}}{P\sqrt{-P}}(\sin z - z),$$

$$x = s + \frac{Q^2 K\sqrt{2}}{4P^2\sqrt{-P}}\left(\frac{\sin 2z}{4} - 2\sin z + \frac{3z}{2}\right),$$

où il faudra faire maintenant $s = l$, $y = b$, $x = a$, & z tel que $\cos z = \frac{Pm}{Q} + 1$; de forte qu'on aura

$$1 + \frac{Pm}{Q} = \cos\left(\frac{l\sqrt{-P}}{K\sqrt{2}}\right),$$

$$b = \frac{QK\sqrt{2}}{P\sqrt{-P}}\left(\sin\left(\frac{l\sqrt{-P}}{K\sqrt{2}}\right) - \frac{l\sqrt{-P}}{K\sqrt{2}}\right),$$

$$a = l + \frac{Q^2K\sqrt{2}}{2P^2\sqrt{-P}}\left(\tfrac{1}{4}\sin\left(\frac{2l\sqrt{-P}}{K\sqrt{2}}\right) - 2\sin\left(\frac{l\sqrt{-P}}{K\sqrt{2}}\right) + \frac{3l\sqrt{-P}}{2K\sqrt{2}}\right),$$

§. IV.

Comme la poſition des coordonnées $AN = a$, & $NC = b$, dépend de celle de la tangente AN au point A de la courbe élaſtique ABC, il ſera bon d'introduire à leur place la corde AC, & l'angle ACT qu'elle fait avec la tangente CT au point C où la lame élaſtique eſt ſuppoſée fixe. Soit donc $AC = r$, & $ACT = \alpha$, & l'angle CTN ſera égal à la valeur de ϕ au point C, c'eſt à dire, $= m$; de ſorte qu'on aura l'angle $CAN = m - \alpha$, & de là $a = r\cos(m - \alpha)$, $b = r\sin(m - \alpha)$.

Fig. 3.

Changeons auſſi les deux forces P, & Q qui agiſſent ſuivant AP, & AQ en deux autres qui agiſſent ſuivant AR, c'eſt à dire, dans la direction de la corde CA prolongée, & ſuivant AT perpendiculaire à AR, & nommant la premiere de ces forces R, & la ſeconde T, on aura $P = R\cos(m - \alpha) + T\sin(m - \alpha)$, $Q = -R\sin(m - \alpha) + T\cos(m - \alpha)$; ou bien en faiſant

faisant pour plus de simplicité $R = p \cos q$, $T = p \sin q$, en sorte que $p = \sqrt{(R^2 + T^2)}$, & $\tan q = \frac{T}{R}$, on aura

$$P = p \cos(q + \alpha - m),$$
$$Q = p \sin(q + \alpha - m).$$

Ainsi il n'y aura qu'à faire ces substitutions dans les équations trouvées ci-dessus, & chassant ensuite m, on aura deux équations par lesquelles on pourra déterminer p & q, c'est à dire, R & T par l, r & α.

§. V.

Pour rendre le calcul plus simple nous remarquerons d'abord que Q devant être par l'hypothese une quantité très petite, il faudra aussi que b soit très petite; donc on aura tant $\sin(m - \alpha)$ que $\sin(q + \alpha - m)$ très petit; mais m est aussi un angle très petit du même ordre que Q; donc les angles α, m & q seront tous très petits du même ordre, de sorte qu'on aura à très peu près $a = r\left(1 - \frac{(m-\alpha)^2}{2}\right)$, $b = r(m - \alpha)$, $P = p\left(1 - \frac{(q+\alpha-m)^2}{2}\right)$, $Q = p(q + \alpha - m)$; par conséquent si on substitue ces valeurs dans les équations du §. III. & qu'on fasse pour abréger

$$\omega = \frac{l\sqrt{} - p}{K\sqrt{2}},$$

on aura en négligeant ce qu'on doit négliger

$$1 + \frac{m}{q + \alpha - m} = \cos\omega,$$

$$\frac{r}{l}(m - \alpha) = (q + \alpha - m)\left(\frac{\sin\omega}{\omega} - 1\right),$$

$$\frac{r}{l}\left(1 - \frac{(m-\alpha)^2}{2}\right) = 1 + \frac{(q+\alpha-m)^2}{2}\left(\frac{\sin 2\omega}{4\omega} - \frac{2\sin\omega}{\omega} + \frac{3}{2}\right).$$

 Or

Or cette derniere équation donne en négligeant les quantités très petites au dessus du second ordre

$$\frac{r}{l} = 1 + \frac{(m-\alpha)^2}{2} + \frac{(q+\alpha-m)^2}{2}\left(\frac{\sin 2\omega}{4\omega} - \frac{2\sin\omega}{\omega} + \frac{3}{2}\right),$$

de sorte que la seconde équation deviendra celle-ci

$$m - \alpha = (q + \alpha - m)\left(\frac{\sin\omega}{\omega} - 1\right);$$

or la premiere donne

$$m = (q + \alpha)\left(1 - \frac{1}{\cos\omega}\right),$$

& cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, on aura

$$\frac{q}{\alpha} = \frac{\sin\omega}{\omega\cos\omega - \sin\omega},$$

$$\frac{m}{\alpha} = \frac{\omega(\cos\omega - 1)}{\omega\cos\omega - \sin\omega};$$

donc faisant ces substitutions dans l'équation qui donne la valeur de $\frac{l}{r}$, on aura

$$\frac{\frac{l}{r} - 1}{\alpha^2} = \frac{(\sin\omega - \omega)^2 + \frac{\omega\sin 2\omega}{4} - 2\omega\sin\omega + \frac{3\omega^2}{2}}{2(\omega\cos\omega - \sin\omega)^2}.$$

Ainsi, en supposant l & r donnés, la derniere équation donnera d'abord ω en α, d'où l'on connoitra aussi p en α à cause de $p = -\frac{2K^2\omega^2}{l^2}$; ensuite les deux autres équations donneront m & q.

§. VI.

§. VI.

Puisque nous avons supposé q très petit, les deux forces R & T (§. IV.) deviendront $R = p$, & $T = pq$, c'est à dire, $R = -\frac{2K^2\omega^2}{l^2}$, & $T = -\frac{2K^2\omega^2}{l^2}q$; ainsi on connoitra les deux forces T & R pour chaque angle α.

Supposons que la force perpendiculaire T soit nulle; il faudra donc que $q = 0$; donc aussi $\sin\omega = 0$, pourvu que ω ne soit pas $= 0$; autrement le dénominateur $\omega\cos\omega - \sin\omega$ le deviendroit aussi; donc on aura $\omega = \mu\pi$, π étant l'angle de 180 degrés & μ un nombre quelconque entier positif ou négatif excepté zero. Donc on aura dans ce cas $R = -\frac{2K^2\mu^2\pi^2}{l^2}$; d'où il s'ensuit que si le ressort n'est tendu que par une seule force AR qui agisse dans la direction de la corde AC, il faudra que cette force soit dirigée de A vers C, & qu'elle ne soit pas moindre que $\frac{2K^2\mu^2\pi^2}{l^2}$, c'est à dire, moindre que $\frac{2K^2\pi^2}{l^2}$, pour qu'elle puisse produire dans le ressort une très petite courbure quelconque; & toute force qui sera moindre que $\frac{2K^2\pi^2}{l^2}$ ne produira absolument aucun effet dans la lame élastique. M. Euler a déjà fait cette curieuse remarque, & il en déduit des conséquences rélatives à la force des colonnes dans un excellent Mémoire sur ce sujet, auquel nous nous contenterons ici de renvoyer. (Voyez le Volume de l'année 1757.)

Or, puisqu'en faisant $\omega = \pi$ la force T disparoit, supposons $\omega = \pi - t$, t étant un angle fort petit, & l'on aura $\sin\omega = \sin t = t$, $\cos\omega = -\cos t = -1 + \frac{t^2}{2}$; donc en négli-

 geant

geant ce qu'on doit négliger dans les équations du §. V, on aura

$$\frac{q}{\alpha} = \frac{t}{\pi}, \quad \frac{\frac{l}{r} - 1}{\alpha^2} = \frac{5}{4} + \frac{3t}{4\pi};$$

d'où l'on aura $\frac{\frac{l}{r} - 1}{\alpha^2} = \frac{5}{4} + \frac{3q}{4\alpha}$, & de là $q = \frac{4\left(\frac{l}{r} - 1\right)}{3\alpha} - \frac{5\alpha}{3}$; donc

$$T = \frac{2K^2\pi^2}{3l^2}\left[5\alpha - \frac{4\left(\frac{l}{r} - 1\right)}{\alpha}\right].$$

Ainsi, tant que l'angle α sera $= 2\sqrt{\left[\frac{\frac{l}{r} - 1}{5}\right]}$, la force perpendiculaire T sera nulle; mais lorsqu'on augmentera ou diminuera cet angle α, c'est à dire, l'angle ACT, le ressort exercera perpendiculairement à la corde AC une force T qu'on pourra déterminer par la formule précédente, pourvu que α soit fort petit.

Fig. 3.

§. VII.

Fig. 3. & 4.

Prenons maintenant dans la tangente CT un point quelconque C', & ayant tiré la ligne C'AR' réduisons les forces P, & Q, qui agissent au point A (§. II.) à deux autres R' & T', dont l'une R' tire suivant la direction AR', & l'autre T' suivant la direction AT' perpendiculaire à AR'; il est facile de trouver par une méthode semblable à celle du §. IV. que si on nomme l'angle $AC'T = \alpha'$, & qu'on fasse $R' = p' \cos q'$, $T' = p' \sin q'$, on aura

$$P = p' \cos(q' + \alpha' - m),$$
$$Q = p' \sin(q' + \alpha' - m).$$

Soit

Soit de plus la ligne $AC' = r'$, & la ligne donnée $CC' = h$, on aura d'abord $AC = r = \sqrt{(h^2 + r'^2 + 2hr' \cos a')}$, & $\sin \alpha : \sin \alpha' = r' : r$; d'où $\sin \alpha = \frac{r' \sin \alpha'}{r}$; ainsi ayant r & α en r' & α', on aura aussi a & b en r' & α', en substituant les valeurs de r & α dans les formules $a = r \cos(m - \alpha)$, $b = r \sin(m - \alpha)$ du §. IV.

Or, comme les angles α, & m sont supposés très petits de l'ordre de la force Q, il est clair que les trois angles α', q' & m seront tous très petits du même ordre; ainsi l'on aura à très peu près,

$$P = p'\left(1 - \frac{(q' + \alpha' - m)^2}{2}\right), \quad Q = p(q' + \alpha' - m),$$

$$r = h + r' - \frac{hr'\alpha'^2}{2(h + r')}, \quad \alpha = \frac{r'\alpha'}{r} = \frac{r'\alpha'}{h + r'}, \quad \&$$

de là

$$a = h + r' - \frac{hr'\alpha'^2}{2(h+r')} - \frac{(h+r')}{2}\left(m - \frac{r'\alpha'}{h+r'}\right)^2,$$

$$b = (h + r')\left(m - \frac{r'\alpha'}{h + r'}\right).$$

De sorte qu'en faisant ces substitutions dans les équations du §. III. & supposant comme plus haut $\omega' = \frac{l\sqrt{} - p'}{K\sqrt{2}}$, on aura

$$1 + \frac{m}{q' + \alpha' - m} = \cos \omega',$$

$$\frac{(h + r')\, m - r'\alpha'}{b} = (q' + \alpha' - m)\left(\frac{\sin \omega'}{\omega'} - 1\right),$$

$$\frac{h+r'}{l}\left(1-\frac{hr'\alpha'^2+(m(h+r')-r'\alpha')^2}{2(h'+r')^2}\right),$$
$$=1+\frac{(q'+\alpha'-m)^2}{2}\left(\frac{\sin 2\omega'}{4\omega'}-\frac{2\sin\omega'}{\omega'}+\frac{3}{2}\right).$$

Suppoſons maintenant $h+r'=l$, & les équations précédentes deviendront celles-ci

$$1+\frac{m}{q'+\alpha'-m}=\cos\omega,$$
$$\frac{lm-r'\alpha'}{l}=(q'+\alpha'-m)\left(\frac{\sin\omega'}{\omega'}-1\right),$$
$$-\frac{hr'\alpha'^2+(ml-r'\alpha')^2}{l^2}=(q'+\alpha'-m)^2\left(\frac{\sin 2\omega'}{4\omega'}-\frac{2\sin\omega'}{\omega'}+\frac{3}{2}\right).$$

Les deux premieres donnent d'abord

$$\frac{m}{\alpha'}=\frac{r'}{l}\times\frac{\omega(\cos\omega-1)}{\omega\cos\omega-\sin\omega},$$
$$\frac{q'}{\alpha'}=\frac{\left(\frac{r'}{l}-1\right)\omega\cos\omega+\sin\omega}{\omega\cos\omega-\sin\omega},$$

& ces valeurs étant ſubſtituées dans la troiſieme on aura, à cauſe de $h=l-r'$,

$$\frac{r'}{l}=\frac{(\omega\cos\omega-\sin\omega)^2+\frac{\omega\sin 2\omega}{4}-2\omega\sin\omega+\frac{3\omega^2}{2}}{(\omega\cos\omega-\sin\omega)^2-(\sin\omega-\omega)^2},$$

Ainſi dans ce cas l'angle ω ſera donné par la ſeule quantité $\frac{r'}{l}$; & par conſéquent la quantité $\frac{q'}{\alpha'}$ deviendra auſſi une fonction de $\frac{r'}{l}$; &

& comme $p' = -\frac{2K^2\omega'^2}{l^2}$, il s'enſuit que la force T', qui eſt à très peu près égale à $p'q'$, ſera toujours exprimée par une fonction donnée de $\frac{r'}{l}$ multipliée par $\frac{\alpha}{l^2}$;

Donc, ſi l'on a une lame élaſtique ABC fixée en C, & dont la poſition naturelle & libre ſoit la droite CA', & que l'extrémité A' de cette lame ſoit forcée de décrire autour du point C' pris dans la droite CA' l'arc très petit A'A, en ſorte qu'elle vienne dans la ſituation ABC; on fera $CA' = l$, $A'C = r'$, & $A'C'A = \alpha$, & l'on trouvera par les formules précédentes les deux forces p', & $p'q$ que la lame dans l'état forcé ABC exercera à l'extrémité A, la premiere de ces forces agiſſant ſuivant la direction du rayon AC' & la ſeconde ſuivant celle de la tangente en A. Et comme on a ici l & r' conſtans pendant que α varie, il s'enſuit que ω ſera conſtant auſſi, & qu'ainſi la force tangentielle T ſera toujours proportionelle à l'arc AA'; d'où il s'enſuit que ſi un corps étoit attaché à l'extrémité A, ce corps feroit autour du point A' des oſcillations iſochrones, dont on pourra déterminer la durée par les équations ci-deſſus. Fig. 5.

On pourroit ſe ſervir utilement de cette propriété des lames élaſtiques dans les balanciers des montres ſi on vouloit ſe contenter de leur faire faire des oſcillations très petites; car ſuppoſant que A'FGH ſoit le balancier dont C' ſoit le centre, il n'y aura qu'à fixer une lame élaſtique d'une longueur quelconque A'C, d'un côté à un point fixe C, & d'autre au point A' de la circonférence du balancier, & on ſera aſſuré que ſes vibrations ſeront iſochrones, au moins tant qu'elles ſeront très petites; ce que perſonne, que je ſache, n'avoit encore démontré en toute rigueur. (Voyez le XXXVI. Mémoire des Opuſcules de M. d'Alembert.) Fig. 6.

§. VIII.

§. VIII.

Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que la courbure du reſſort devoit être très petite; voyons maintenant comment on peut réſoudre le probleme en général, quelle que puiſſe être la figure de la lame élaſtique. Or, comme les équations trouvées dans le §. II. ſont abſolument inintégrables, il eſt impoſſible de déterminer les forces P & Q en *l*, *a* & *b*, ou bien les forces R & T en *l*, *r* & *a*, (§. IV.) par des équations finies, mais peut-être pourroit-on les déterminer par des équations différentielles qui donneroient les variations de T & de R répondantes à celles de *r* & *a*; c'eſt ce qu'il eſt bon d'examiner.

Reprenons donc les trois équations du §. II. & mettant d'abord à la place de P, & Q les valeurs trouvées dans le §. IV. elles ſe changeront en celles-ci

$$ds = \frac{K\, d\phi}{\sqrt{p} \times \sqrt{(\text{cof}(q + a - m) - \text{cof}(q + a - m + \phi))}},$$

$$dy = \frac{K \text{ fin } \phi\, d\phi}{\sqrt{p} \times \sqrt{(\text{cof}(q + a - m) - \text{cof}(q + a - m + \phi))}},$$

$$dx = \frac{K \text{ cof } \phi\, d\phi}{\sqrt{p} \times \sqrt{(\text{cof}(q + a - m) - \text{cof}(q + a - m + \phi))}}.$$

La ſeconde de ces équations étant multipliée par fin $(q + a - m)$, & enſuite retranchée de la troiſieme multipliée par cof $(q + a - m)$, on aura

$$\text{cof}(q + a - m)\, dx - \text{fin}(q + a - m)\, dy$$
$$= \frac{K \text{ cof}(q + a - m + \phi)\, d\phi}{\sqrt{p} \times \sqrt{(\text{cof}(q + a - m) - \text{cof}(q + a - m + \phi))}}.$$

De même en multipliant la ſeconde par cof$(q + a - m)$, & l'ajoutant à la troiſieme multipliée par fin $(q + a - m)$, on aura

cof

$$\cos(q + \alpha - m)\, dy + \sin(q + \alpha - m)\, dx$$
$$= \frac{K \sin(q + \alpha - m + \phi)\, d\phi}{\sqrt{p} \times \sqrt{(\cos(q + \alpha - m) - \cos(q + \alpha - m + \phi))}},$$

équation qui eſt abſolument intégrable, & dont l'intégrale priſe en ſorte que x, & y s'évanouiſſent lorsque $\phi = 0$, eſt celle-ci

$$y \cos(q + \alpha - m) + x \sin(q + \alpha - m)$$
$$= \frac{K \sqrt{(\cos(q + \alpha - m) - \cos(q + \alpha - m + \phi))}}{2\sqrt{p}}.$$

Ainſi il faudra combiner cette équation avec ces deux-ci

$$s = \frac{K}{\sqrt{p}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{(\cos(q + \alpha - m) - \cos(q + \alpha - m + \phi))}},$$

$$x \cos(q + \alpha - m) - y \sin(q + \alpha - m)$$
$$= \frac{K}{\sqrt{p}} \int \frac{\cos(q + \alpha - m + \phi)\, d\phi}{\sqrt{(\cos(q + \alpha - m) - \cos(q + \alpha - m + \phi))}}.$$

Soit, pour abréger, $q + \alpha - m = n$, & ſuppoſons que les intégrales $\int \frac{d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n + \phi))}}$, & $\int \frac{\cos(n + \phi)\, d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n + \phi))}}$, priſes en ſorte qu'elles ſoient nulles lorsque $\phi = 0$, deviennent A & B lorsque $\phi = m$; & l'on aura en faiſant $x = a$, $y = b$, $s = l$, & $\phi = m$, ces trois équations

$$\frac{2\sqrt{p}}{K} (b \cos(+ \alpha - m) + a \sin(q + \alpha - m))$$
$$= \sqrt{(\cos(q + \alpha - m) - \cos(q + \alpha))},$$

$$\frac{l\sqrt{p}}{K} = A,$$

$$\frac{\sqrt{p}}{K} (a \cos(q + \alpha - m) - b \sin(q + \alpha - m)) = B,$$

 ou

ou bien en substituant pour a & b les valeurs du §. IV.

$$\frac{l\sqrt{p}}{K} = A,$$

$$\frac{r\sqrt{p}}{K}\cos q = B,$$

$$\frac{2r\sqrt{p}}{K}\sin q = \sqrt{(\cos(q + a - m) - \cos(q + a))}.$$

Maintenant, puisque l'on a

$$A = \int\frac{d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n + \phi))}},$$

$$B = \int\frac{\cos(n + \phi)\, d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n + \phi))}},$$

si on fait varier dans ces expressions tant ϕ que n, on aura

$$dA = \frac{d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n + \phi))}} + \frac{\sin n\, dn}{2}\int\frac{d\phi}{(\cos n - \cos(n + \phi))^{\frac{3}{2}}}$$
$$- \frac{dn}{2}\int\frac{\sin(n + \phi)\, d\phi}{(\cos n - \cos(n + \phi))^{\frac{3}{2}}}.$$

$$dB = \frac{\cos(n + \phi)\, d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n + \phi))}} + \frac{\sin n\, dn}{2}\int\frac{\cos(n + \phi)\, d\phi}{(\cos n - \cos(n + \phi))^{\frac{3}{2}}}$$
$$- dn\int\frac{\sin(n + \phi)\, d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n + \phi))}} - \frac{dn}{2}\int\frac{\sin(n + \phi)\cos(n + \phi)\, d\phi}{(\cos n - \cos(n + \phi))^{\frac{3}{2}}}.$$

Or $\frac{1}{2}\int\frac{\sin(n + \phi)\, d\phi}{(\cos n - \cos(n + \phi))^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{(\cos n - \cos(n + \phi))}},$

$$\& \int \frac{\sin(n+\phi)\, d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} + \tfrac{1}{2}\int \frac{\sin(n+\phi)\cos(n+\phi)\, d\phi}{(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}}$$

$$= - \frac{\cos(n+\phi)}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}};$$

Donc on aura

$$dA = \frac{dn + d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} + \frac{\sin n\, dn}{2}\int \frac{d\phi}{(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}},$$

$$dB = \frac{\cos(n+\phi)(dn + d\phi)}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} + \frac{\sin n\, dn}{2}\int \frac{\cos(n+\phi)\, d\phi}{(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}}.$$

Supposons pour plus de simplicité

$$F = \int \frac{d\phi}{(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}}, \quad G = \int \frac{\cos(n+\phi)\, d\phi}{(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}},$$

& comme on ne peut pas trouver les valeurs de F, & G par l'intégration, il faut tâcher de les déterminer par le moyen des quantités A, B.

Pour cela je remarque que l'on a

1°. $$\frac{d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} = \frac{\cos n\, d\phi}{(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{\cos(n+\phi)\, d\phi}{(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}};$$ d'où en intégrant on aura

$$A = F \cos n - G.$$

2°. $$\frac{\cos(n+\phi)\, d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} = \frac{\cos n \cos(n+\phi)\, d\phi}{(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{\cos(n+\phi)^2\, d\phi}{(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}};$$ & $$d. \frac{\sin(n+\phi)}{\sqrt{(\cos n - \cos(+\phi))}}$$

=

$$= \frac{\cos(n+\phi)\,d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} - \frac{\sin(n+\phi)^2\,d\phi}{2(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}};$$

par conséquent

$$2\,d.\ \frac{\sin(n+\phi)}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} = \frac{\cos n\,\cos(n+\phi)\,d\phi}{(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{\cos(n+\phi)\,d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} - \frac{d\phi}{(\cos n - \cos(n+\phi))^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc en intégrant on aura

$$\frac{2\sin(n+\phi)}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} = G\cos n + B - F.$$

Ainsi combinant cette équation avec la précédente $A = F\cos n - G$, on tirera

$$F = \frac{B - A\cos n - \frac{2\sin(n+\phi)}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}}}{\sin n^2},$$

$$G = \frac{B\cos n - A - \frac{2\cos n\sin(n+\phi)}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}}}{\sin n^2}.$$

Donc, substituant ces valeurs dans les expressions de dA, & dB trouvées ci-dessus, on aura

$$dA = \frac{dn + d\phi}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} - \frac{\sin(n+\phi)\,dn}{\sin n\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}}$$

$$+ \frac{(B - A\cos n)\,dn}{2\sin n},$$

dB

$$dB = \frac{\cos(n+\phi)(dn+d\phi)}{\sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} - \frac{\cos n \sin(n+\phi)\, dn}{\sin n \sqrt{(\cos n - \cos(n+\phi))}} + \frac{(B\cos n - A)\, dn}{2\sin n}.$$

Donc, remettant à la place de n sa valeur $q + \alpha - m$, & faisant $\phi = m$, on aura

$$dA = \frac{dq + d\alpha}{\sqrt{(\cos(q+\alpha-m) - \cos(q+\alpha))}} - \frac{\sin(q+\alpha)(dq + d\alpha - dm)}{\sin(q+\alpha-m)\sqrt{(\cos(q+\alpha-m) - \cos(q+\alpha))}} + \frac{B - A\cos(q+\alpha-m)}{2\sin(q+\alpha-m)}(dq + d\alpha - dm),$$

$$dB = \frac{\cos(q+\alpha)(dq + d\alpha)}{\sqrt{(\cos(q+\alpha-m) - \cos(q+\alpha))}} - \frac{\cos(q+\alpha-m)\sin(q+\alpha)(dq + d\alpha - dm)}{\sin(q+\alpha-m)\sqrt{(\cos(q+\alpha-m) - \cos(q+\alpha))}} + \frac{B\cos(q+\alpha-m) - A}{2\sin(q+\alpha-m)}(dq + d\alpha - dm).$$

Donc, faisant pour plus de simplicité $\alpha - m = \beta$, on aura enfin ces trois équations

$$\frac{2r\sqrt{p}}{K}\sin q = \sqrt{(\cos(q+\beta) - \cos(q+\alpha))},$$

$$\text{d.}\left(\frac{l\sqrt{p}}{\text{K}}\right) = \frac{\text{d}q + \text{d}\alpha}{\sqrt{(\cos(q+\beta) - \cos(q+\alpha))}}$$
$$- \frac{\sin(q+\alpha)\,(\text{d}q + \text{d}\beta)}{\sin(q+\beta)\sqrt{(\cos(q+\beta) - \cos(q+\alpha))}}$$
$$+ \frac{r\cos q - l\cos(q+\beta)}{2\,\text{K}\sin(q+\beta)}\sqrt{p}\,(\text{d}q + \text{d}\beta),$$

$$\text{d.}\left(\frac{r\sqrt{p}}{\text{K}}\cos q\right) = \frac{\cos(q+\alpha)\,(\text{d}q + \text{d}\alpha)}{\sqrt{(\cos(q+\beta) - \cos(q+\alpha))}}$$
$$- \frac{\cos(q+\beta)\sin(q+\alpha)\,(\text{d}q + \text{d}\beta)}{\sin(q+\beta)\sqrt{(\cos(q+\beta) - \cos(q+\alpha))}}$$
$$+ \frac{r\cos q\cos(q+\beta) - l}{2\,\text{K}\sin(q+\beta)}\sqrt{p}\,(\text{d}q + \text{d}\beta).$$

§. IX.

Telles sont les équations par lesquelles on doit déterminer les forces $\text{R} = p\cos q$, & $\text{T} = p\sin q$, que la lame élastique ABC, fixe en C, exerce à l'extrémité A, en supposant donnés, la longueur de la lame $\text{ABC} = l$, la corde $\text{AC} = r$, & l'angle $\text{TCA} = \alpha$. Pour faciliter le calcul on prendra la valeur de $\cos(q+\beta)$ de la premiere équation & on la substituera dans les deux autres, lesquelles deviendront par là

Fig. 3.

$$\text{d.}\left(\frac{l\sqrt{p}}{\text{K}}\right) = \frac{\text{K}\,(\text{d}q + \text{d}\alpha)}{2r\sqrt{p}\sin q}$$
$$+\left(\frac{\text{K}\sin(q+\alpha)}{2r\sqrt{p}\sin q} - \frac{r\sqrt{p}\cos q}{2\text{K}} + \frac{l\sqrt{p}}{2\text{K}}\left(\frac{4r^2 p\sin q^2}{\text{K}^2} + \cos(q+\alpha)\right)\right)$$
$$\times\frac{8\text{K}^2 r\sqrt{p}\sin q\,\text{d.}(r\sqrt{p}\sin q) + \text{K}^4\,\text{d.}\cos(q+\alpha)}{\text{K}^4 - (4r^2 p\sin q^2 + \text{K}^2\cos(q+\alpha))^2},$$

d.

$$d.\left(\frac{r\sqrt{p}}{K}\cos q\right) = \frac{K\cos(q+\alpha)\,(dq+d\alpha)}{2r\sqrt{p}\sin q}$$

$$+\left(\frac{r\sqrt{p}}{2K}+\left(\frac{K\sin(q+\alpha)}{2r\sqrt{p}\sin q}-\frac{r\sqrt{p}\cos q}{2K}\right)\left(\frac{4r^2p\sin q^2}{K^2}+\cos(q+\alpha)\right)\right)$$

$$\times\frac{8K^2r\sqrt{p}\sin q\, d.(r\sqrt{p}\sin q)+K^4\, d\cos(q+\alpha)}{K^4-(4r^2p\sin q^2+K^2\cos(q+\alpha))^2}.$$

Ces équations sont, comme l'on voit, trop compliquées pour qu'on puisse en tirer quelque lumiere sur la loi des forces tendantes R, & T; cependant elles pourroient servir à déterminer la vraie figure de la fusée au moins par une équation différentielle.

Pour cela on supposera que C soit le centre du barillet ou tambour, où le ressort est renfermé, & à la circonférence duquel l'extrémité mobile A est attachée; de cette maniere r sera le rayon du tambour qui est constant, & α sera l'angle que le tambour aura parcouru en tournant autour de son axe pour bander le ressort; de sorte que $r\alpha$ sera égale à la longueur de la corde désentortillée d'autour du tambour, & entortillée autour de la fusée; donc, si on considere la courbe qui par sa révolution autour de son axe produiroit le solide dont on doit faire la fusée, & qu'on nomme y l'ordonnée de cette courbe, & ds l'élément de l'arc, on aura $\int y\,ds$ pour la portion de surface de la fusée qui sera couverte par la corde, & qui devra par conséquent être égale à la longueur αr de la corde entortillée à la fusée, cette longueur étant divisée par le diametre même de la corde; ainsi nommant e le diametre ou l'épaisseur de la corde on aura d'abord $\alpha = \frac{\int y\,ds}{er}$. Fig. 3.

Maintenant il est clair que la corde ne sera tendue par le ressort qu'avec une force égale à $T = p \sin q$, l'autre force R ne faisant que presser la surface du tambour au point où l'extrémité du ressort est attachée; donc le moment de la force du ressort pour faire tourner la fusée sera $= Ty = yp\sin q$, lequel devant être constant, on

aura

aura l'équation $y p \sin q = g$; ainsi il n'y aura qu'à substituer dans les deux équations précédentes $\frac{g}{y \sin q}$ à la place de p, & $\frac{\int y \, ds}{er}$ à la place de α, & chassant ensuite la variable q, on aura une équation entre y & ds, qui déterminera la nature de la courbe de la fusée.

§. X.

Dans les recherches précédentes nous avons supposé que le ressort étant fixe par une de ses extrémités, l'autre étoit retenue dans une position donnée par deux forces appliquées à cette extrémité, & nous avons cherché la valeur de ces forces; mais si on vouloit que la tangente à cette même extrémité fût aussi donnée, alors il faudroit qu'une troisieme force agît sur la lame, & qu'elle fût appliquée à quelque distance de l'extrémité dont il s'agit pour qu'elle pût avoir quelque moment par rapport à cette extrémité.

Fig. 2. Ainsi on imaginera qu'une verge inflexible AP soit jointe à la lame élastique en A, & que cette verge soit tirée au point P par une nouvelle force M, dont la direction soit perpendiculaire à AP, c'est à dire, parallele à la force Q, qui agit suivant AQ (§. II.); & il résultera de ces deux forces M & Q une force unique $= M + Q$ agissant perpendiculairement à la verge AP, & à une distance du point A $= \frac{M}{M + Q}$ AP. Or la force P donne, comme nous l'avons vu dans le §. cité, le moment Py par rapport au point B, & la force $M + Q$ donnera par rapport au même point le moment $(M + Q)\left(\frac{M}{M + Q} AP + x\right)$, c'est à dire, en faisant $AP = c$, & $M + Q = N$, le moment $Mc + Nx$; d'où il s'ensuit qu'on aura pour l'équation de la lame élastique

$$Mc + Nx + Py = \frac{2K^2}{\varrho}.$$

Donc

Donc, faiſant les mêmes ſubſtitutions que dans le §. II, on aura

$$Mc + N \int \cos\phi \, ds + P \int \sin\phi \, ds = \frac{2K^2 \, d\phi}{ds},$$

de ſorte que lorsque $\phi = 0$, on aura ici $\frac{2K^2 \, d\phi}{ds} = Mc$.

Cette équation étant différentiée, & enſuite multipliée par $\frac{d\phi}{ds}$, & intégrée de nouveau, donnera

$$C - P \cos\phi + N \sin\phi = \frac{K^2 \, d\phi^2}{ds^2},$$

où la conſtante C doit être déterminée par la condition qu'en faiſant $\phi = 0$ on ait $\frac{d\phi}{ds} = \frac{Mc}{2K^2}$; ainſi on aura $C = P + \frac{M^2c^2}{4K^2}$; donc

$$ds = \frac{K \, d\phi}{\sqrt{\left(\frac{M^2c^2}{4K^2} + P(1 - \cos\phi) + N \sin\phi\right)}},$$

$$dy = \frac{K \sin\phi \, d\phi}{\sqrt{\left(\frac{M^2c^2}{4K^2} + P(1 - \cos\phi) + N \sin\phi\right)}},$$

$$dx = \frac{K \cos\phi \, d\phi}{\sqrt{\left(\frac{M^2c^2}{4K^2} + P(1 - \cos\phi) + N \sin\phi\right)}},$$

équations qui ne different de celles du §. II. que par le terme conſtant $\frac{Mc^2}{4K^2}$.

§. XI.

§. XI.

Si les quantités P & N étoient nulles, c'eſt à dire, ſi la force tangentielle évanouiſſoit, & que les deux forces perpendiculaires fuſſent égales entr'elles & de direction contraire, alors la lame élaſtique prendroit la figure d'un cercle; car on auroit dans ce cas $ds = \frac{2K^2 d\phi}{Mc}$, $dy = \frac{2K^2 \sin\phi \, d\phi}{Mc}$, $dx = \frac{2K^2 \cos\phi \, d\phi}{Mc}$; d'où l'on tireroit par l'intégration, $s = \frac{2K^2}{Mc}\phi$, $y = \frac{2K^2}{Mc}(1-\cos\phi)$, $x = \frac{2K^2}{Mc}\sin\phi$; ce qui montre que la courbe eſt un cercle dont le rayon eſt $\frac{2K^2}{Mc}$.

Donc, ſi les quantités P, & N, au lieu d'être nulles, étoient ſeulement très petites vis à vis de la quantité $\frac{2K^2}{Mc}$, la courbe ſeroit à très peu près circulaire; & elle ne ſeroit autre choſe qu'une eſpece de ſpirale fort peu différente d'un cercle.

Comme ce cas mérite d'être examiné en détail nous allons en faire l'objet du §. ſuivant.

§. XII.

Suppoſons donc P, & N très petites vis à vis de $\frac{M^2c^2}{4K^2}$, & la quantité radicale

$$\frac{K}{\sqrt{\left(\frac{M^2c^2}{4K^2} + P(1 - \cos\phi) + N\sin\phi\right)}},$$

devien-

deviendra à très peu près

$$\frac{2K^2}{Mc}\left(1 - \frac{2K^2P}{M^2c^2}(1 - \cos\phi) - \frac{2K^2N}{M^2c^2}\sin\phi\right).$$

Soit pour abréger

$$\frac{2K^2}{Mc} = R, \quad \frac{2K^2P}{M^2c^2} = T, \quad \frac{2K^2N}{M^2c^2} = V,$$

& les équations du §. X. deviendront celles-ci

$$ds = R(1 - T(1 - \cos\phi) - V\sin\phi)\, d\phi,$$
$$dy = R(1 - T(1 - \cos\phi) - V\sin\phi)\sin\phi\, d\phi,$$
$$dx = R(1 - T(1 - \cos\phi) - V\sin\phi)\cos\phi\, d\phi,$$

lesquelles étant intégrées en ſorte que x, y & s ſoient nuls lorsque $\phi = 0$, on aura

$$s = R(\phi - T(\phi - \sin\phi) - V(1 - \cos\phi)),$$
$$y = R\left(1 - \cos\phi - T\left(\tfrac{3}{4} - \cos\phi + \tfrac{1}{4}\cos 2\phi\right) - V\left(\frac{\phi}{2} - \tfrac{1}{4}\sin 2\phi\right)\right),$$
$$x = R\left(\sin\phi + T\left(\frac{\phi}{2} - \sin\phi + \tfrac{1}{4}\sin 2\phi\right) - V\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cos 2\phi\right)\right).$$

De ſorte qu'en faiſant $s = l$, $y = b$, $x = a$, & $\phi = m$, (§. II.) on aura ces trois équations

$$l = R(m - T(m - \sin m) - V(1 - \cos m)),$$
$$b = R\left(1 - \cos m - T\left(\tfrac{3}{4} - \cos m + \tfrac{1}{4}\cos 2m\right) - V\left(\frac{m}{2} - \tfrac{1}{4}\sin 2m\right)\right),$$
$$a = R\left(\sin m + T\left(\frac{m}{2} - \sin m + \tfrac{1}{4}\sin 2m\right) - V\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cos 2m\right)\right),$$

§. XIII.

Fig. 3. & 7. Maintenant si on tire par les extrémités A, & C de la lame élastique les perpendiculaires AH, & CH aux tangentes AN, CT, il est clair que l'angle AHC sera $= m$; de sorte que si on fait $AH = p$, $CH = q$, on aura $AN = a = q \sin m$, & $NC = b = p - q \cos m$, & les équations du §. précéd. donneront celles-ci

$$R = \frac{l}{m - T(m - \sin m) - V(1 - \cos m)};$$

$$\frac{p - q \cos m}{l} = \frac{1 - \cos m - T(\frac{3}{4} - \cos m + \frac{1}{4}\cos 2m) - V\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\sin 2m\right)}{m - T(m - \sin m) - V(1 - \cos m)},$$

$$\frac{q \sin m}{l} = \frac{\sin m + T\left(\frac{m}{2} - \sin m + \frac{1}{4}\sin 2m\right) - V(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2m)}{m - T(m - \sin m) - V(1 - \cos m)}.$$

Si on fait $T = 0$, & $V = 0$, on a

$$\frac{p - q \cos m}{l} = \frac{1 - \cos m}{m}, \ \& \ \frac{q \sin m}{l} = \frac{\sin m}{m},$$

d'où l'on tire $p = q = \frac{l}{m}$. Donc, tant que V & T seront très petits, on aura $p = \frac{l(1 + t)}{m}$, $q = \frac{l(1 + u)}{m}$, t, & u étant des quantités très petites de l'ordre de V & T. Donc, si on substitue ces valeurs dans la seconde & la troisieme des équations précédentes, & qu'après avoir multiplié en croix en négligeant les quantités très petites du second ordre, on fasse pour abréger

$\lambda =$

$$\lambda = \sin m \left(\frac{m \sin m}{2} - 1 + \cos m\right),$$

$$\mu = (1 - \cos m)^2 - \frac{m}{2}(m - \sin m \cos m),$$

$$\nu = \frac{m}{2}(m + \sin m \cos m) - \sin m^2,$$

$$\varrho = (1 - \cos m) \sin m - \frac{m}{2}(m + 1 - 2 \sin m^2),$$

on aura

$$(t - u \cos m)\, m = \lambda T + \mu V,$$

$$u m \sin m = \nu T + \varrho V,$$

d'où en faiſant encore

$$\sigma = \frac{\sin m^3 (1 - \cos m)}{2} - \frac{\sin m}{4}(m + 1 - 2 \sin m^2) \left(\frac{m \sin m}{2} - 1 + \cos m\right) - (1 - \cos m)^2 (\sin m \cos m + m) + \frac{m}{4}(m^2 - \sin m^2 \cos m^2) - \frac{\sin m^2}{2}(m - \sin m \cos m),$$

on aura

$$T = \frac{\varrho(t - u \cos m) - \mu u \sin m}{\sigma},$$

$$V = \frac{\lambda u \sin m - \nu(t - u \cos m)}{\sigma},$$

& de là on trouvera auſſi R par la premiere équation.

Ainſi connoiſſant R, T, & V, on aura

$$Mc = \frac{2K^2}{R}, \quad P = \frac{2K^2 T}{R^2}, \quad N = M + Q = \frac{2K^2 V}{R^2},$$

§. XIV.

Fig. 7. Donc, si on suppose que C′ soit le centre du tambour ou barillet dont le rayon soit C′A, & que le ressort CA soit fixé par l'extrémité C d'une maniere quelconque à l'axe du bariller, & que par l'autre extrémité A il soit fixement appliqué à la circonférence du barillet en sorte que la courbe du ressort touche la circonférence du barillet au point A; nommant l'angle parcouru par le barillet en tournant autour de son axe depuis la ligne fixe CC′, c'est à dire, l'angle AC′C $= \alpha$, & faisant le rayon du barillet AC′ $= r$, la ligne CC′ $= \varrho$, & l'angle C′CH $=$ A, on aura $\varpi = \alpha - A$, $\zeta = \frac{\varrho \sin \alpha}{\sin(\alpha - A)}$,

$$\rho = r + \frac{\varrho \sin A}{\sin(\alpha - A)}.$$

Ainsi, substituant ces valeurs dans les formules du §. préc., on trouvera la valeur de la force tangentielle P en α, & de là on pourra déduire la figure de la fusée comme dans le §. IX. en faisant $\alpha = \frac{\int y\, ds}{ar}$, & $y = \frac{g}{T}$.

Il faut cependant observer que, comme nous avons vu dans le §. cité que p & q doivent être à très peu près égaux à $\frac{l}{m}$, il faudra que l'angle A soit très petit & r, & ϱ soient à très peu près égaux à $\frac{l}{m}$, d'où l'on voit que pour que ce cas ait lieu il faut que l'extrémité fixe C du ressort soit fort près de la circonférence du barillet, & que la tangente en C soit presque perpendiculaire au rayon CC′.

§. XV.

§. XV.

Au reste la condition que p, & q soient presque égaux à $\frac{l}{m}$, ne seroit pas nécessaire si on supposoit que les quantités l, & m fussent très grandes du même ordre; car alors les quantités T, & V pourroient être supposées très petites de l'ordre de $\frac{1}{m}$, & l'on auroit dans cette hypothese (§. XIII.) les équations

$$R = \frac{l}{m},$$

$$\frac{p - q \cos m}{l} = \frac{1 - \cos m - \frac{Vm}{2}}{m},$$

$$\frac{q \sin m}{l} = \frac{\sin m + \frac{Tm}{2}}{m},$$

d'où l'on tire

$$T = \frac{2\left(\frac{m}{l} q - 1\right) \sin m}{m},$$

$$V = - \frac{2\left(\frac{m}{l} p - 1\right) - \left(\frac{m}{l} q - 1\right) \cos m}{m},$$

de sorte que $P = \frac{2K^2T}{R^2}$, & $N = \frac{2K^2V}{R^2}$ seront des quantités fort petites, comme on l'a supposé dans les calculs du §. XI.

Ce cas aura donc lieu lorsque le ressort sera fort long, & qu'il sera un très grand nombre de tours en forme de spirale. Ainsi, si on suppose

ſuppoſe qu'un pareil reſſort ſoit appliqué à un balancier dont le centre
Fig. 7. ſoit C' & que l'une des extrémités du reſſort étant arrêtée en C l'autre ſoit fixée perpendiculairement au rayon C'A du balancier, on nommera, comme dans §. XIV, les diſtances données $CC' = \varrho$, $AC' = r$, l'angle donné $C'CH = A$, & l'angle variable $AC'C = \alpha$, & l'on aura $p = r + \frac{\varrho \operatorname{ſin} A}{\operatorname{ſin}(\alpha - A)}$, $q = \frac{\varrho \operatorname{ſin} \alpha}{\operatorname{ſin}(\alpha - A)}$, & $m = \mu\pi + \alpha - A$; π étant la circonférence du cercle, & μ dénotant le nombre des tours que le reſſort fait autour de C', & qui doit être fort grand.

Donc la force tangentielle P qui tend à faire tourner le balancier ſera à très peu près, en faiſant $\lambda = \frac{\mu\pi}{l}$,

$$P = \frac{K^2(\lambda^3 \varrho \operatorname{ſin}\alpha - \lambda^2 \operatorname{ſin}(\alpha - A))}{\mu\pi},$$

d'où l'on voit que cette force ſera nulle lorſque $\lambda\varrho \operatorname{ſin}\alpha = \operatorname{ſin}(\alpha - A)$; ainſi dénotant par ω la valeur de α qui répond à cette équation, en ſorte que l'on ait

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{ſin} A}{\operatorname{coſ} A - \lambda\varrho},$$

& ſuppoſant en général $\alpha = \omega + \psi$, on aura

$$P = \frac{K^2\lambda^2(\lambda\varrho \operatorname{coſ}\omega - \operatorname{coſ}(\omega - A)) \operatorname{ſin}\psi}{\mu\pi},$$

& le moment pour faire tourner le balancier ſera Pr.

Donc, ſi on nomme H le moment d'inertie du balancier, & qu'on faſſe pour abréger

$$\frac{K^2\lambda^2 r(\lambda\varrho \operatorname{coſ}\omega - \operatorname{coſ}(\omega - A))}{\mu\pi H} = \Pi,$$

on

on aura pour le mouvement du balancier l'équation

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = - \Pi \sin\psi,$$

qui est la même que celle du mouvement d'un pendule simple dont la longueur seroit $\frac{g}{\Pi}$, g étant la force de la gravité; de sorte que le balancier fera des oscillations semblables à celles d'un tel pendule, & le point de repos sera où $\psi = 0$, c'est à dire, où l'angle α sera $= \omega$.

Ainsi plus la longueur du ressort & le nombre de ses tours augmenteront, plus le mouvement du balancier approchera de celui d'un pendule simple circulaire, de sorte que le mouvement du pendule peut être regardé comme la limite, & l'asimptote de celui d'un balancier mû par un ressort spiral, pourvu que le ressort soit d'une épaisseur uniforme, & que son état libre soit la ligne droite.

§. XVI.

Si on vouloit que l'extrémité A du ressort fût attachée à l'axe même du balancier, comme on le pratique ordinairement, alors les forces P & Q (§. X.) seroient détruites, & la force M seroit celle qui agiroit sur le balancier pour le faire tourner, avec un moment égal à $Mc = \frac{2K^2}{R}$. Fig. 7.

Ainsi, dans le cas du §. préc., ce moment seroit $= 2K^2 \frac{m}{l}$; par conséquent il seroit presque constant; de sorte qu'il n'en résulteroit point de mouvement oscillatoire. Cette maniere de faire agir le ressort conviendroit donc beaucoup au ressort moteur qui fait tourner le barillet; car son action étant par ce moyen presque constante, la fusée ne seroit plus nécessaire.

Au reste il faut toujours se souvenir que ces conclusions sont fondées sur l'hypothese que la lame du ressort soit naturellement droite, & que sa longueur soit très grande; c'est ce qui fait qu'elles n'ont pas lieu dans les ressorts ordinaires qu'on applique aux horloges; mais il n'est pas impossible qu'elles puissent être d'usage dans quelques occasions.

§. XVII.

Si on ne vouloit pas adopter l'hypothese que nous avons faite ci-dessus, que les forces P & N soient très petites, il faudroit revenir aux équations générales du §. X, & en déduire des équations différentielles entre les forces M, N & P par une méthode analogue à celle du §. VIII.

Pour cela on fera $P = p \cos q$, $N = p \sin q$, & $\frac{M^2 c^2}{4K^2} + P = pr$, & supposant ensuite

$$(x \sin q + y \cos q)\frac{\sqrt{p}}{K} = X,$$

$$(x \cos q - y \sin q)\frac{\sqrt{p}}{K} = Y,$$

$$\frac{s\sqrt{p}}{K} = Z,$$

on trouvera, en ayant soin d'ajouter les constantes nécessaires pour que x, y, & z évanouissent lorsque $\phi = 0$, & faisant pour plus de simplicité $q + \phi = u$, on trouvera, dis-je, ces trois équations

$$\frac{X}{2} = \sqrt{(r - \cos u)} - \sqrt{(r - \cos q)},$$

$$dY = \frac{\cos u \, du}{\sqrt{(r - \cos u)}} - \frac{\cos q \, dq}{\sqrt{(r - \cos q)}}$$

$$- \frac{dr}{1 - r^2} \left(\frac{rY - Z}{2} - \frac{r \sin u}{\sqrt{(r - \cos u)}} + \frac{r \sin q}{\sqrt{(r - \cos q)}} \right),$$

$$dZ = \frac{du}{\sqrt{(r - \cos u)}} - \frac{dq}{\sqrt{(r - \cos q)}}$$

$$- \frac{dr}{1 - r^2} \left(\frac{Y - rZ}{2} - \frac{\sin u}{\sqrt{(r - \cos u)}} + \frac{\sin q}{\sqrt{(r - \cos q)}} \right),$$

dans lesquelles on pourra faire $x = a$, $y = b$, $s = l$, & $\phi = m$, comme dans le §. cité.



SUR
LE PROBLEME
DE
KEPLER.

PAR MR. DE LA GRANGE. (*)

Ce probleme consiste, comme l'on sait, à couper l'aire elliptique en raison donnée, & sert principalement à déterminer l'anomalie vraie des planetes par leur anomalie moyenne. Depuis *Képler*, qui a le premier essayé de le résoudre, plusieurs savans Géometres s'y sont appliqués, & en ont donné différentes solutions qu'on peut ranger dans trois classes. Les unes sont simplement arithmériques, & sont fondées sur la regle de fausse position; ce sont celles dont les Astronomes se servent ordinairement dans le calcul des élémens des Planetes: les autres sont géométriques ou mécaniques, & dépendent de l'intersection des courbes; celles-ci sont plutôt de simple curiosité que d'usage dans l'Astronomie: la troisieme classe enfin comprend les solutions algébriques, qui donnent l'expression analitique de l'anomalie vraie par l'anomalie moyenne, aussi bien que celle du rayon vecteur de l'orbite; expressions qui sont d'un usage continuel & indispensable dans la théorie des perturbations des corps célestes.

L'équation par laquelle on doit déterminer la rélation qui a lieu entre l'anomalie moyenne & l'anomalie vraie, est transcendante, & ne peut par conséquent être résolue que par approximation; de sorte qu'on est obligé d'avoir recours aux suites infinies: or on ne peut déterminer directement que l'anomalie moyenne par l'anomalie vraie; & pour

(*) Lû à l'Académie le 1 Novembre 1770.

pour avoir l'expression de celle-ci par le moyen de celle-là, il faut employer la méthode du retour des suites, qui est non seulement longue & pénible, mais qui a aussi l'inconvénient de donner des series irrégulieres, où l'on ne sauroit connoître la loi des termes. J'ai donné dans un Mémoire imprimé dans le Volume de l'année 1768. une méthode particuliere pour résoudre par le moyen des series toutes les équations soit algébriques ou transcendantes; comme cette méthode joint à l'avantage de la facilité & de la simplicité du calcul celui de donner toujours des séries régulieres & dont le terme général soit connu, j'ai cru qu'il ne seroit pas inutile d'en faire l'application au fameux probleme de *Képler*, & de fournir par là aux Astronomes des formules plus générales que celles qu'ils ont eues jusqu'à présent pour la solution de ce probleme; c'est là l'objet du présent Mémoire.

I.

Soit ABD une demi-ellipse dont le grand axe AD $= 2a$, le demi petit axe CB $= ma$, la demi-excentricité CF $= na = a\sqrt{(1-m^2)}$ en sorte que $n = \sqrt{(1-m^2)}$; soit de plus le rayon vecteur FL $= ar$, l'angle de l'anomalie vraie DFL $= u$, le rapport de l'aire entiere de l'ellipse à l'aire DFL comme l'angle de 4 droits, que je nomme π à l'angle t, qui sera par conséquent l'angle de l'anomalie moyenne; il s'agit de déterminer tant r que u par t. Planche VI. Fig. 1.

Pour cela on décrira sur le grand axe AD le demi-cercle AED, & ayant mené par le point L la droite NLM perpendiculaire à AD, & tiré par N les droites NF, & NC, on considérera que par la nature de l'ellipse l'aire elliptique DFL a à l'aire DFN la même proportion que l'aire entiere de l'ellipse a à l'aire entiere du cercle, laquelle est $= \frac{a^2\pi}{2}$; de sorte qu'on aura aussi $\pi : t = \frac{a^2\pi}{2} :$ DFN; & par conséquent $t = \frac{2\,\mathrm{DFN}}{a^2}$.

Or

Or nommant x l'angle DCN qu'on appelle d'après *Képler* l'anomalie de l'excentrique, on aura $CM = a \cos x$, $MN = a \sin x$, & $ML = ma \sin x$; donc $DFN = DCN + FCN = DCN + \frac{FC \times MN}{2}$ $= \frac{a^2 x}{2} + \frac{na^2 \sin x}{2}$; donc

$$t = x + n \sin x.$$

Maintenant on aura $FL = ar = \sqrt{(FM^2 + ML^2)}$ $= a\sqrt{((n + \cos x)^2 + m^2 \sin x^2)} =$ (à cause de $m^2 = 1 - n^2$) $a\sqrt{(1 + 2n \cos x + n^2 \cos x^2)} = a(1 + n \cos x)$, donc

$$r = 1 + n \cos x.$$

De là on aura $\sin u = \frac{ML}{LF} = \frac{m \sin x}{1 + n \cos x}$, $\cos u =$ $\frac{FM}{LF} = \frac{n + \cos x}{1 + n \cos x}$; donc $\frac{\sin u}{1 + \cos u} = \frac{m}{1 + n}$ $\times \frac{\sin x}{1 + \cos x}$, ou bien

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} u = \frac{m}{1 + n} \text{ tang } \tfrac{1}{2} x.$$

Si on vouloit avoir l'expression de l'angle u, on différentieroit cette équation, ce qui donneroit $\frac{du}{(\cos \frac{1}{2} u)^2} = \frac{m}{1 + n} \times \frac{dx}{(\cos \frac{1}{2} x)^2}$, ou bien $\frac{du}{1 + \cos u} = \frac{m}{1 + n} \times \frac{dx}{1 + \cos x}$, & substituant pour $1 + \cos u$ sa valeur $(1 + n) \frac{1 + \cos x}{1 + n \cos x}$, on auroit

$$du = \frac{m \, dx}{1 + n \cos x}.$$

Ainsi on aura d'abord x en t, & ensuite r, & u en x.

II.

Il faut donc commencer par tirer la valeur de x de l'équation $t = x + n \sin x$, ce qui ne peut se faire que par approximation; or de toutes les méthodes connues d'approximation je crois que la plus simple & la plus générale est celle que j'ai exposée dans mon Mémoire *sur la résolution des équations literales*. J'ai prouvé dans ce Mémoire que si on a une équation quelconque telle que

$$\alpha - x + \phi x = 0,$$

(ϕx dénotant une fonction quelconque de x) & qu'on veuille avoir la valeur d'une autre fonction quelconque de x telle que ψx, faisant $\frac{d.\psi x}{dx} = \psi' x$, la série

$$\psi x + \phi x \psi' x + \frac{d.\phi x^2 \psi' x}{2 dx} + \frac{d^2.\phi x^3 \psi' x}{2.3 dx^2} + \&c.$$

exprimera la fonction cherchée, en y mettant après les différentiations α à la place de x. D'où il suit qu'ayant l'équation

$$t = x + \phi x$$

on trouvera

$$\psi x = \psi t - \phi t \psi' t + \frac{d.\phi t^2 \psi' t}{2 dt} - \frac{d^2.\phi t^3 \psi' t}{2.3 dt^2} + \&c.$$

Ainsi faisant $\phi x = n \sin x$, notre équation $t = x + n \sin x$ donnera sur le champ

$$\psi x = \psi t - n \sin t \psi' t + \frac{n^2 d.\sin t^2 \psi' t}{2 dt} - \frac{n^3 d^2.\sin t^3 \psi' t}{2.3 dt^2} + \&c.$$

de sorte qu'il n'y aura plus qu'à exécuter les différentiations indiquées en prenant dt constant.

III.

III.

Suppoſons premierement $\psi x = x$ pour avoir la valeur de x en t, & l'on aura $\psi t = t$, $\psi' t = 1$, & par conſéquent

$$x = t - n \sin t + \frac{n^2 \, d. \sin t^2}{2 \, dt} - \frac{n^3 \, d^2. \sin t^3}{2.3 \, dt^2} + \&c.$$

Pour pouvoir trouver facilement les valeurs des différentielles des puiſſances de ſin t, il ſera à propos de réduire ces puiſſances en ſimples ſinus ou coſinus d'angles multiples de t. Or on ſait que

$$2 \sin t^2 = \frac{2}{2} - \cos 2t,$$

$$4 \sin t^3 = 3 \sin t - \sin 3t$$

$$8 \sin t^4 = \frac{4.3}{2.2} - 4 \cos 2t + \cos 4t,$$

$$16 \sin t^5 = \frac{5.4}{2} \sin t - 5 \sin 3t + \sin 5t,$$

$$32 \sin t^6 = \frac{6.5.4}{2.2.3} - \frac{6.5}{2} \cos 2t + 6 \cos 4t - \cos 6t,$$

&c.

Donc ſubſtituant ces valeurs dans la formule précédente & faiſant les différentiations indiquées, on aura

$$x = t - n \sin t + \frac{n^2}{2.2} \, 2 \sin 2t,$$

$$+ \frac{n^3}{4.2.3} (3 \sin t - 3^2 \sin 3t),$$

$$- \frac{n^4}{8.2.3.4} (4.2^3 \sin 2t - 4^3 \sin 4t),$$

$$- \frac{n^5}{16.2.3.4.5} \left(\frac{5.4}{2} \sin t - 5.3^4 \sin 3t + 5^4 \sin 5t\right),$$

$+$

$$+ \frac{n^6}{32.2.2.3.4.5.6}\left(\frac{6.5}{2}\, 2^5 \sin 2t - 6.4^5 \sin 4t + 6^5 \sin 6t\right)$$

$$+ \frac{n^7}{64.2.3\ldots 7}\left(\frac{7.6.5}{2.3} \sin t - \frac{7.6}{2}\, 3^6 \sin 3t + 7.5^6 \sin 5t - 7^6 \sin 7t\right)$$

$$- \&c.$$

Ainsi on connoitra l'anomalie de l'excentrique x par l'anomalie moyenne t; ensuite de quoi on pourra trouver le rayon vecteur r, & l'anomalie vraie u par les formules $r = 1 + n \cos x$, & $\text{tang.} \frac{1}{2} u = \frac{m}{1+n} \text{tang} \frac{1}{2} x$; mais on peut aussi trouver les valeurs de r & de $\text{tang} \frac{1}{2} u$ directement, de la maniere suivante.

IV.

Il est clair que pour avoir la valeur de $r = 1 + n \cos x$ il n'y aura qu'à faire dans la formule générale de l'art. II, $\psi x = n \cos x$, ce qui donnera $\psi t = n \cos t$, & $\psi' t = - n \sin t$; de sorte qu'on aura sur le champ

$$r = 1 + n \cos t + n^2 \sin t^2 - \frac{n^3\, d.\sin t^3}{2\, dt} + \frac{n^4\, d^2.\sin t^4}{2.3\, dt^2} - \&c.$$

Donc substituant les valeurs de $\sin t^2$, $\sin t^3$ &c. en sinus & cosinus d'angles multiples de t, & exécutant les différentiations indiquées, on aura

$$r = 1 + n \cos t - \frac{n^2}{2}(-1 + \cos 2t)$$

$$- \frac{n^3}{4.2}(3 \cos t - 3 \cos 3t)$$

$$+ \frac{n^4}{8.2.3}(4.2^2 \cos 2t - 4^2 \cos 4t)$$

$$+ \frac{n^5}{16.2.3.4}\left(\frac{5.4}{2}\cos t - 5.3^3 \cos 3t + 5^3 \cos 5t\right)$$

$$- \frac{n^6}{32.2.3.4.5}\left(\frac{6.5}{2} 2^4 \cos 2t - 6.4^4 \cos 4t + 6^4 \cos 6t\right)$$

$$- \frac{n^7}{64.2.3\ldots 7}\left(\frac{7.6.5}{2.3}\cos t - \frac{7.6}{2} 3^5 \cos 3t + 7.5^5 \cos 5t - 7^5 \cos 7t\right)$$

$$+ \&c.$$

V.

De même, pour avoir la valeur de tang $\frac{1}{2}u$, on fera $\psi x = \frac{m}{1+n}$ tang $\frac{1}{2}x$ $=$ tang $\frac{1}{2}u$; par conséquent aussi $\psi t = \frac{m}{1+n}$ tang $\frac{1}{2}t$; ce qui donnera $\psi' t = \frac{m}{1+n} \times \frac{1}{2(\cos\frac{1}{2}t)^2}$ $= \frac{m}{1+n} \times \frac{1}{1+\cos t} = \frac{m}{1+n} \times \frac{1-\cos t}{(\sin t)^2}$.

Donc, substituant ces valeurs dans la formule de l'Art. II, on aura

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u = \frac{m}{1+n}\left(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}t - n\frac{1-\cos t}{\sin t} + \frac{n^2 d.(1-\cos t)}{2dt} - \frac{n^3 d^2.(1-\cos t)\sin t}{2.3dt^2} + \frac{n^4 d^3.(1-\cos t)\sin t^2}{2.3.4dt^3} - \frac{n^5. d^4. (1-\cos t)\sin t^3}{2.3.4.5dt^4} + \&c.\right);$$

or $\frac{1-\cos t}{\sin t} =$ tang $\frac{1}{2}t$, $\cos t = \frac{d.\sin t}{dt}$, $\sin t \cos t = \frac{d.\sin t^2}{2dt}$,

fin

$\sin t^2 \cos t = \frac{d.\sin t^3}{3\,dt}$ &c.; de forte que l'équation précédente deviendra

$$\tang \tfrac{1}{2}u = \frac{m}{1+n}\Big((1-n)\tang \tfrac{1}{2}t$$
$$-\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{2.3}\right)\frac{d^2.\sin t}{dt^2}+\left(\frac{n^3}{2.2.3}+\frac{n^4}{2.3.4}\right)\frac{d^3.\sin t^2}{dt^3}$$
$$-\left(\frac{n^4}{3.2.3.4}+\frac{n^5}{2.3.4.5}\right)\frac{d^4.\sin t^3}{dt^4}+\&c.\Big),$$

d'où l'on aura

$$\tang \tfrac{1}{2}u = \frac{m}{1+n}\Big((1-n)\tang \tfrac{1}{2}t$$
$$+\frac{n^2}{2}\left(1+\frac{n}{3}\right)\sin t-\frac{n^3}{2.2.3}\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4}\right)2^3\sin 2t$$
$$-\frac{n^4}{4.2.3.4}\left(\frac{1}{3}+\frac{n}{5}\right)(3\sin t-3^4\sin 3t)$$
$$+\frac{n^5}{8.2.3.4.5}\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{6}\right)(4.2^5\sin 2t-4^5\sin 4t)$$
$$+\frac{n^6}{16.2.3\ldots6}\left(\frac{1}{5}+\frac{n}{7}\right)\left(\frac{5.4}{2}\sin t-5.3^6\sin 3t+5^6\sin 5t\right)$$
$$-\&c.\Big).$$

VI.

Si on vouloit avoir la valeur de l'angle même u, il faudroit faire $\psi x = m\int\frac{dx}{1+n\cos x} = u$ (Art. II.); donc $\psi t =$

$m \int \frac{dt}{1 + n \cos t}$, & $\psi t = \frac{m}{1 + n \cos t}$; or $\frac{1}{1 + n \cos t}$
$= 1 - n \cos t + n^2 \cos t^2 - n^3 \cos t^3 + n^4 \cos t^4 -$ &c.;
donc, substituant ces valeurs dans la formule de l'Art. II, & ordonnant les termes par rapport à n, on aura

$$u = m \Big(t - n \left(\int \cos t \, dt + \sin t\right)$$
$$+ n^2 \left(\int \cos t^2 \, dt + \cos t \sin t + \frac{d. \sin t^2}{2 dt}\right)$$
$$- n^3 \left(\int \cos t^3 \, dt + \cos t^2 \sin t + \frac{d. \cos t \sin t^2}{2 dt} + \frac{d^2. \sin t^3}{2. 3 dt^2}\right)$$
$$+ n^4 \Big(\int \cos t^4 \, dt + \cos t^3 \sin t + \frac{d. \cos t^2 \sin t^2}{2 dt}$$
$$+ \frac{d^2. \cos t \sin t^3}{2. 3 dt^2} + \frac{d^3. \sin t^4}{2. 3. 4 dt^3}\Big)$$
$$+ \text{\&c.} \Big),$$

& il ne s'agira plus que d'exécuter les intégrations & les différentiations indiquées, ce qui sera facile dès qu'on aura réduit les produits des sinus & cosinus de t à des sinus & cosinus d'angles multiples de t.

Mais, pour rendre le calcul plus simple, il est bon de faire en sorte que l'expression de u ne contienne que des puissances de sin t; c'est pourquoi on changera la quantité $\frac{1}{1 + n \cos t}$ en celle-ci
$\frac{1 - n \cos t}{1 - n^2 \cos t^2} = \frac{1 - n \cos t}{1 - n^2 + n^2 \sin t^2} = \frac{1 - n \cos t}{m^2 + m^2 \sin t^2}$
(Art. I.); laquelle étant ensuite réduite en série donnera

$$\frac{1}{1 + n \cos t} = \frac{1}{m^2} - \frac{n \cos t}{m^2} - \frac{n^2 \sin t^2}{m^4} + \frac{n^3 \sin t^2 \cos t}{m^4}$$
$$+ \frac{n^4 \sin t^4}{m^6} - \frac{n^5 \sin t^4 \cos t}{m^6} - \frac{n^6 \sin t^6}{m^8} + \&c.$$

de forte qu'on trouvera après quelques réductions fort fimples

$$u = \frac{t}{m} - \frac{2n \cdot \sin t}{m}$$
$$- \frac{n^2}{2}\left(\frac{2\int \sin t^2 \, dt}{m^3} - \frac{4 \, d. \sin t^2}{2m \, dt}\right)$$
$$+ \frac{n^3}{3}\left(\frac{4 \sin t^3}{m^3} - \frac{6 \, d^2. \sin t^3}{2.3m \, dt^2}\right)$$
$$+ \frac{n^4}{4}\left(\frac{4\int \sin t^4 \, dt}{m^5} - \frac{6 \, d. \sin t^4}{2m^3 \, dt} + \frac{8 \, d^3. \sin t^4}{2.3.4m \, dt^4}\right)$$
$$- \frac{n^5}{5}\left(\frac{6 \sin t^5}{m^5} - \frac{8 \, d^2. \sin t^5}{2.3m^3 \, dt^2} + \frac{10 \, d^4. \sin t^5}{2.3.4.5m \, dt^5}\right)$$
$$- \frac{n^6}{6}\left(\frac{6\int \sin t^6 \, dt}{m^7} - \frac{8 \, d. \sin t^6}{2m^5 \, dt} + \frac{10 \, d^3. \sin t^6}{2.3.4m^3 \, dt^3} - \frac{12 \, d^5. \sin t^6}{2.3.4.5.6m \, dt^5}\right)$$
$$+ \frac{n^7}{7}\left(\frac{8 \sin t^7}{m^7} - \frac{10 \, d^2. \sin t^7}{2.3m^5 \, dt^2} + \frac{12 \, d^4. \sin t^7}{2.3.4.5m^3 \, dt^4} - \frac{14 \, d^6. \sin t^7}{2.3.4.5.6.7m \, dt^7}\right)$$
$$+ \&c.$$

Réduifant maintenant les puiffances de fin t en finus & cofinus de multiples de t par les formules de l'Art. III, & exécutant les intégrations & les différentiations indiquées, on aura

 $u =$

$$u = \frac{t}{m} - \frac{2n \sin t}{m}$$

$$- \frac{n^2}{2.2}\left(\frac{2.2t}{2m^3} - \left(\frac{2}{2m^3} + \frac{4.2}{2m}\right)\sin 2t\right)$$

$$+ \frac{n^3}{4.3}\left(3\left(\frac{4}{m^3} + \frac{6}{2.3m}\right)\sin t - \left(\frac{4}{m^3} + \frac{6.3^2}{2.3m}\right)\sin 3t\right)$$

$$+ \frac{n^4}{8.4}\left(\frac{4.4.3t}{2.2m^5} - 4\left(\frac{4}{2m^5} + \frac{6.2}{2m^3} + \frac{8.2^3}{2.3.4m}\right)\sin 2t\right.$$

$$\left. + \left(\frac{4}{4m^5} + \frac{6.4}{2m^3} + \frac{8.4^3}{2.3.4m}\right)\sin 4t\right)$$

$$- \frac{n^5}{16.5}\left(\frac{5.4}{2}\left(\frac{6}{m^5} + \frac{8}{2.3m^3} + \frac{10}{2.3.4.5m}\right)\sin t\right.$$

$$- 5\left(\frac{6}{m^5} + \frac{8.3^2}{2.3m^3} + \frac{10.3^4}{2.3.4.5m}\right)\sin 3t$$

$$\left. + \left(\frac{6}{m^5} + \frac{8.5^2}{2.3m^3} + \frac{10.5^4}{2.3.4.5m}\right)\sin 5t\right)$$

$$- \frac{n^6}{32.6}\left(\frac{6.6.5.4t}{2.2.3m^7} - \frac{6.5}{2}\left(\frac{6}{2m^7} + \frac{8.2}{2m^5} + \frac{10.2^3}{2.3.4m^3}\right.\right.$$

$$\left. + \frac{12.2^5}{2.3\ldots6m}\right)\sin 2t$$

$$+ 6\left(\frac{6}{4m^7} + \frac{8.4}{2m^5} + \frac{10.4^3}{2.3.4m^3} + \frac{12.4^5}{2.3..6m}\right)\sin 4t$$

$$\left. - \left(\frac{6}{6m^7} + \frac{8.6}{2m^5} + \frac{10.6^3}{2.3.4m^3} + \frac{12.6^5}{2.3..6m}\right)\sin 6t\right)$$

$$+ \text{\&c.}$$

VII

VII.

Nous avons donné plus haut (Art. V.) la valeur de tang $\frac{1}{2}u$; si on vouloit aussi avoir celle du logarithme de la même tangente, on la trouveroit avec la même facilité en faisant $\psi x = l$ tang $\frac{1}{2}u = l\left(\frac{m}{1+n} \text{ tang } \frac{1}{2}x\right)$, & par conséquent $\psi t = l\,\frac{m}{1+n} + l \text{ tang } \frac{1}{2}t$, & $\psi' t = \frac{1}{\text{fin } t}$; ce qui étant substitué dans la formule de l'Art. II, on auroit

$$l \text{ tang } \tfrac{1}{2}u = l\,\frac{m}{1+n} + l \text{ tang } \tfrac{1}{2}t - n + \frac{n^2 \text{ d. fin } t}{2\text{d}t} - \frac{n^3 \text{ d}^2\text{. fin } t^2}{2.3\,\text{d}t^2} + \frac{n^4 \text{ d}^3 \text{ fin } t^3}{2.3.4\,\text{d}t^3} - \&c.$$

c'est à dire, en réduisant les puissances de fin t en sinus & cosinus de multiples de t, & exécutant les différentiations indiquées

$$\begin{aligned} l \text{ tang } \tfrac{1}{2}u = {} & l\,\frac{m}{1+n} + l \text{ tang } \tfrac{1}{2}t \\ & - n + \frac{n^2}{2} \text{ cof } t - \frac{n^3}{2.2.3}\, 2^2 \text{ cof } 2t \\ & - \frac{n^4}{4.2.3.4}\,(3 \text{ cof } t - 3^3 \text{ cof } 3t) \\ & + \frac{n^5}{8.2.3.4.5}\,(4.2^4 \text{ cof } 2t - 4^4 \text{ cof } 4t) \\ & + \frac{n^6}{16.2.3.4.5.6}\left(\frac{5.4}{2} \text{ cof } t - 5.3^5 \text{ cof } 3t + 5^5 \text{ cof } 5t\right) \\ & - \frac{n^7}{32.2.3\ldots.7}\left(\frac{6.5}{2}\, 2^6 \text{ cof } 2t - 6.4^6 \text{ cof } 4t + 6^6 \text{ cof } 6t\right) \\ & - \&c. \end{aligned}$$

VIII.

VIII.

Les séries que nous venons de trouver dans les Art. préc. sont ordonnées par rapport aux puissances de l'excentricité z; or comme leur loi est assez claire, il ne seroit pas difficile de les ordonner par rapport aux sinus ou cosinus des angles multiples de t, ainsi qu'on le pratique communément; cependant, pour ne rien laisser à désirer sur ce sujet, je vais donner ici d'autres séries équivalentes à celles-là, & disposées de cette derniere maniere.

Pour y parvenir je remarque (comme je l'ai déjà fait dans le Mémoire cité Art. 17.) que si on prend la fraction

$$\frac{\psi' t}{z(1 + z\phi t)},$$

qu'on la développe suivant les puissances de z, ce qui donne $\frac{\psi' t}{z}$ $- \phi t \, \psi' t + z \phi t^2 \, \psi' t - z^2 \phi t^3 \, \psi' t$ &c. & qu'ensuite on change, $\frac{1}{z}$ en $\int \mathrm{d} t$, z en $\frac{\mathrm{d}}{2 \mathrm{d} t}$, z^2 en $\frac{\mathrm{d}^2}{2 . 3 \mathrm{d} t^2}$ &c. & ainsi des autres puissances de z, on aura la valeur de la fonction ψx (Art. II.).

Supposons que les fonctions ϕt & ψt soient exprimées par des sinus, & des cosinus de t, il est facile de voir qu'en employant les exponentielles imaginaires, on pourra toujours développer la fraction $\frac{\psi' t}{z(1 + z\phi t)}$ en une série de cette forme

$$\begin{aligned} M &+ M' e^{t\sqrt{-1}} + M'' e^{2t\sqrt{-1}} + M''' e^{3t\sqrt{-1}} + \&c. \\ &+ N' e^{-t\sqrt{-1}} + N'' e^{-2t\sqrt{-1}} + N''' e^{-3t\sqrt{-1}} + \&c. \end{aligned}$$

où les coëfficiens M, M', M'' &c. N', N'' &c. seront des fonctions de z. Donc, dès qu'on aura développé ces coëfficiens suivant les puissan-

puissances de z, il n'y aura qu'à mettre, dans M, t à la place de $\frac{1}{z}$, & zero à la place de z, z^2 &c.; dans M′, $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ à la place de $\frac{1}{z}$, $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ à la place de z, $\frac{(\sqrt{-1})^2}{2.3}$ à la place de z^2, $\frac{(\sqrt{-1})^3}{2.3.4}$ à la place de z^3 &c.; dans M″, $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ à la place de $\frac{1}{z}$, $\frac{2\sqrt{-1}}{2}$ à la place de z, $\frac{(2\sqrt{-1})^2}{2.3}$ à la place de z^2 &c.; & en général dans M^r, $\frac{1}{r\sqrt{-1}}$ à la place de $\frac{1}{z}$, $\frac{r\sqrt{-1}}{2}$ à la place de z, $\frac{(r\sqrt{-1})^2}{2.3}$ à la place de z^2 &c.: on fera les mêmes substitutions dans N′, N″, &c. N^r, mais en prenant $\sqrt{-1}$ avec le signe $-$; & nommant P, P′, P″, P‴ &c. les quantités dans lesquelles se changeront les coëfficiens M, M′, M″ &c., & Q′, Q″, Q‴ &c. celles dans lesquelles se changeront les coëfficiens N′, N″, N‴ &c. on aura pour la valeur de ψx cette expression

$$\psi x = P + P' e^{t\sqrt{-1}} + P'' e^{2t\sqrt{-1}} + P''' e^{3t\sqrt{-1}} + \&c.$$
$$+ Q' e^{-t\sqrt{-1}} + Q'' e^{-2t\sqrt{-1}} + Q''' e^{-3t\sqrt{-1}} + \&c.$$

laquelle se réduira facilement à une série de sinus ou cosinus d'angles multiples de t.

IX.

Soit comme plus haut $\phi t = \sin t$, & la fraction qu'il s'agira de développer, pour avoir la valeur de ψx, sera

$$\frac{\psi' t}{z(1 + xz \sin t)}.$$

Or

Or, comme $\sin t = \frac{e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, on aura $\frac{1}{1 + nz \sin t}$ $= \frac{1}{1 + \frac{nz}{2\sqrt{-1}}(e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}})}$; cette fraction peut se partager en celles-ci

$$\alpha + \beta\left(\frac{1}{p + qe^{t\sqrt{-1}}} + \frac{1}{p - qe^{-t\sqrt{-1}}}\right),$$

en faisant $p^2 - q^2 = 1$, $pq = \frac{nz}{2\sqrt{-1}}$, $\alpha(p^2 - q^2) + 2p\beta = 1$, $\alpha pq + \beta q = 0$; d'où l'on tire

$$\alpha = -\frac{1}{p^2 + q^2}, \quad \beta = \frac{p}{p^2 + q^2},$$
$$p + q\sqrt{-1} = \sqrt{(1 + n^2z^2)},$$
$$p - q\sqrt{-1} = \sqrt{(1 - n^2z^2)},$$

& par conséquent

$$p = \frac{\sqrt{(1 + n^2z^2)} + \sqrt{(1 - n^2z^2)}}{2},$$
$$q = \frac{\sqrt{(1 + n^2z^2)} - \sqrt{(1 - n^2z^2)}}{2}.$$

Maintenant on aura $\frac{1}{p + qe^{t\sqrt{-1}}} = \frac{1}{p} - \frac{qe^{t\sqrt{-1}}}{p^2}$ $+ \frac{q^2e^{2t\sqrt{-1}}}{p^3} - \frac{q^3e^{3t\sqrt{-1}}}{p^4} +$ &c. & de même $\frac{1}{p - qe^{-t\sqrt{-1}}}$ $= \frac{1}{p} + \frac{qe^{-t\sqrt{-1}}}{p^2} + \frac{q^2e^{-2t\sqrt{-1}}}{p^3} + \frac{q^3e^{-3t\sqrt{-1}}}{p^4} +$ &c.

donc

donc la fraction $\frac{1}{1 + nz \sin t}$ deviendra

$$\frac{1}{p^2 + q^2} \left(1 - \frac{q}{p} e^{t\sqrt{-1}} + \frac{q^2}{p^2} e^{2t\sqrt{-1}} - \frac{q^3}{p^3} e^{2t\sqrt{-1}} + \&c. \right.$$
$$\left. + \frac{q}{p} e^{-t\sqrt{-1}} + \frac{q^2}{p^2} e^{-2t\sqrt{-1}} + \frac{q^3}{p^3} e^{-3t\sqrt{-1}} + \&c. \right),$$

où l'on aura

$$p^2 + q^2 = \sqrt{(1 - n^2 z^2)}, \qquad \&$$

$$\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{(1 + n^2 z^2)} - \sqrt{(1 - n^2 z^2)}}{(\sqrt{(1 + n^2 z^2)} + \sqrt{(1 - n^2 z^2)})\sqrt{-1}}$$
$$= \frac{nz}{1 + \sqrt{(1 - n^2 z^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}}.$$

De sorte que si l'on fait pour abréger

$$Z = \frac{z}{1 + \sqrt{(1 - n^2 z^2)}},$$

& qu'on remarque que $\frac{dZ}{Z\,dz} = \frac{1}{z\sqrt{(1 - n^2 z^2)}}$, on aura

$$\frac{1}{z(1 + nz \sin t)} =$$

$$\frac{dZ}{dz} \left(\frac{1}{Z} - \frac{n}{\sqrt{-1}} e^{t\sqrt{-1}} + \frac{n^2 Z}{(\sqrt{-1})^2} e^{2t\sqrt{-1}} - \frac{n^3 Z^2}{(\sqrt{-1})^3} e^{3t\sqrt{-1}} + \&c. \right.$$
$$\left. + \frac{n}{\sqrt{-1}} e^{-t\sqrt{-1}} + \frac{n^2 Z}{(\sqrt{-1})^2} e^{-2t\sqrt{-1}} + \frac{n^3 Z^2}{(\sqrt{-1})^3} e^{-3t\sqrt{-1}} + \&c. \right),$$

& il ne s'agira plus que de développer suivant les puissances de z les quantités $\frac{dZ}{Z\,dz}$, $\frac{dZ}{dz}$, $\frac{Z\,dZ}{dz}$ &c.

Con-

Considérons en général la quantité $\frac{Z^{r-1}\,dZ}{dz} = \frac{d.Z^r}{r\,dz}$, & faisant $Z^r = y$, en sorte que $\frac{Z^{r-1}\,dZ}{dz} = \frac{dy}{r\,dz}$, j'aurai $\frac{dy}{y} = \frac{r\,dZ}{Z} = \frac{r\,dz}{z\sqrt{(1 - n^2 z^2)}}$; d'où je tire en multipliant les deux membres de cette équation en croix, & différentiant après les avoir carrés

$$r^2 y\,dz^2 - (1 - 2n^2 z^2) z\,dy\,dz - (1 - n^2 z^2) z^2\,dy^2 = 0,$$

équation par laquelle on pourra déterminer commodément y en z. Or il est facile de voir par la nature de la quantité Z, que la valeur de $y = Z^r$ développée suivant les puissances de z, sera de cette forme

$$y = A z^r + n^2 B z^{r+2} + n^4 C z^{r+4} + \&c.$$

où le premier coëfficient A sera $= \frac{1}{2^r}$. Substituant donc cette série à la place de y, & égalant à zero les termes homogenes, on aura

$$r(r+1)A + (r^2 - (r+2)^2)B = 0,$$
$$(r+2)(r+3)B + (r^2 - (r+4)^2)C = 0,$$
$$(r+4)(r+5)C + (r^2 - (r+6)^2)D = 0,$$
&c.

d'où l'on tire

$$B = \frac{r(r+1)A}{4(r+1)},$$

$$C = \frac{(r+2)(r+3)B}{4.2(r+2)},$$

$$D = \frac{(r+4)(r+5)C}{4.3(r+3)},$$

&c. &

& par conséquent, à cause de $A = \frac{1}{2^r}$,

$$A = \frac{1}{2^r},$$

$$B = \frac{r}{2^{r+2}},$$

$$C = \frac{r(r+3)}{2.\,2^{r+4}},$$

$$D = \frac{r(r+4)(r+5)}{2.\,3.\,2^{r+6}},$$

&c.

Donc

$$Z^r = \frac{1}{2^r}\left(z^r + r\left(\frac{n}{2}\right)^2 z^{r+2} + \frac{r(r+3)}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^{r+4} + \frac{r(r+4)(r+5)}{2.\,3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^{r+6} + \&c.\right).$$

Et de là

$$\frac{Z^{r-1}dZ}{dz} = \frac{1}{2^r}\left(z^{r-1} + (r+2)\left(\frac{n}{2}\right)^2 z^{r+1} + \frac{(r+3)(r+4}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^{r+3} + \frac{(r+4)(r+5)(r+6)}{2.\,3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^{r+5} + \&c.\right).$$

De sorte qu'en faisant successivement $r = 0,\ 1,\ 2$ &c. on aura

$$\frac{dZ}{Z\,dz} = \frac{1}{z} + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 z + \frac{3.4}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^3 + \frac{4.5.6}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^5 + \&c.$$

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 + 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 z^2 + \frac{4.5}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^4 + \frac{5.6.7}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^6 + \&c.\right)$$

$$\frac{ZdZ}{dz} = \frac{1}{2^2}\left(z + 4\left(\frac{n}{2}\right)^2 z^3 + \frac{5.6}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^5 + \frac{6.7.8}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^7 + \&c.\right)$$

$$\frac{Z^2dZ}{dz} = \frac{1}{2^3}\left(z^2 + 5\left(\frac{n}{2}\right)^2 z^4 + \frac{6.7}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 z^6 + \frac{7.8.9}{2.3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 z^8 + \&c.\right)$$

&c.

X.

Reprenons le cas de l'Art. III, où l'on demande l'anomalie de l'excentrique x, par l'anomalie moyenne t; on fera donc $\psi x = x$, & $\psi t = t$, $\psi' t = 1$; ce qui donnera la fraction $\frac{1}{z(1 + nz \sin t)}$, qui peut ſe développer en une ſérie de cette forme

$$M + M' e^{t\sqrt{-1}} + M'' e^{2t\sqrt{-1}} + M''' e^{3t\sqrt{-1}} + \&c.$$
$$+ N' e^{-t\sqrt{-1}} + N'' e^{-2t\sqrt{-1}} + N''' e^{-3t\sqrt{-1}} + \&c.$$

où l'on aura (Art. préc.)

$$M = \frac{dZ}{Zdz}, \quad M' = -\frac{n\,dZ}{dz\sqrt{-1}}, \quad M'' = \frac{n^2 Z\,dZ}{(\sqrt{-1})^2 dz} \ \&c.$$

$$N' = \frac{n\,dZ}{dz\sqrt{-1}}, \quad N'' = \frac{n^2 Z\,dZ}{(\sqrt{-1})^2 dz} \ \&c.$$

Donc, ſubſtituant pour $\frac{dZ}{Zdz}$, $\frac{dZ}{dz}$, $\frac{ZdZ}{dz}$ &c. les valeurs trouvées dans le même Art. & faiſant les réductions enſeignées dans l'Art. VIII. on aura

$x =$

$$x = t - \frac{nA'}{2\sqrt{-1}}\left(e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}}\right) + \frac{n^2 A''}{2^2\sqrt{-1}}\left(e^{2t\sqrt{-1}} - e^{-2t\sqrt{-1}}\right)$$
$$- \frac{n^3 A'''}{2^3\sqrt{-1}}\left(e^{3t\sqrt{-1}} - e^{-3t\sqrt{-1}}\right) + \&c.$$

ou bien

$$x = t - 2\left(\frac{n}{2}\right) A' \sin t + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 A'' \sin 2t$$
$$- 2\left(\frac{n}{2}\right)^3 A''' \sin 3t + 2\left(\frac{n}{2}\right)^4 A^{IV} \sin 4t - \&c.$$

où les coëfficiens A', A'', &c. seront déterminés ainsi

$$A' = 1 - 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 \frac{1}{2.\ 3} + \frac{4.5}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 \frac{1}{2.3.4.5} - \&c.$$

$$A'' = \frac{2}{2} - 4\left(\frac{n}{2}\right)^2 \frac{2^3}{2.\ 3.\ 4} + \frac{5.6}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 \frac{2^5}{2.3..6} - \&c.$$

$$A''' = \frac{3^2}{2.3} - 5\left(\frac{n}{2}\right)^2 \frac{3^4}{2.3.4.5} + \frac{6.7}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 \frac{3^6}{2.3..7} - \&c.$$

&c.

c'est à dire, en faisant $\frac{n}{2} = \nu$,

$$A' = 1 - \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu^4}{2^2.\ 3} - \frac{\nu^6}{2^2.\ 3^2.\ 4} + \&c.$$

$$A'' = \frac{2}{2} - \frac{2^3 \nu^2}{2.3} + \frac{2^5 \nu^4}{2^2.3.4} - \frac{2^7 \nu^6}{2^2.3^2.4.5} + \&c.$$

$$A''' = \frac{3^2}{2.3} - \frac{3^4 \nu^2}{2.3.4} + \frac{3^6 \nu^4}{2^2.3.4.5} - \frac{3^8 \nu^6}{2^2.3^2.4.5.6} + \&c.$$

A^{IV}

$$A^{IX} = \frac{4^3}{2.3.4} - \frac{4^5 \nu^2}{2.3.4.5} + \frac{4^7 \nu^4}{2^2.3.4.5.6} - \frac{4^9 \nu^6}{2^2.3^2.4.5.6.7} + \&c.$$

&c.

XI.

Pour avoir de la même maniere la valeur du rayon vecteur $ar = a(1 + n\cos x)$, on fera, comme dans l'Art. IV, $\psi t = n \cos t$, & $\psi' t = - n \sin t$, d'où l'on aura la fraction $\frac{- n \sin t}{z(1 + nz \sin t)}$ laquelle peut se réduire à ces deux-ci

$$-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2(1 + nz \sin t)},$$

de sorte qu'on aura (Art. IX.) une série de cette forme

$$\begin{aligned} M &+ M' e^{t\sqrt{-1}} + M'' e^{2t\sqrt{-1}} + M''' e^{3t\sqrt{-1}} + \&c. \\ &+ N' e^{-t\sqrt{-1}} + N'' e^{-2t\sqrt{-1}} + N''' e^{-3t\sqrt{-1}} + \&c. \end{aligned}$$

dans laquelle

$$M = \frac{dZ}{Zz dz} - \frac{1}{z^2}, \quad M' = -\frac{n dZ}{z dz \sqrt{-1}}, \quad M'' = \frac{n^2 Z dZ}{z dz (\sqrt{-1})^2} \&c.$$

$$N' = \frac{n dZ}{z dz \sqrt{-1}}, \quad N'' = \frac{n^2 Z dZ}{z dz (\sqrt{-1})^2} \&c.$$

Donc, substituant les valeurs de $\frac{dZ}{Zz dz}$, $\frac{dZ}{z dz}$ &c. en z, & faisant les réductions convenables (Art. VIII.), on aura, pour la valeur de r, la série

$$\begin{aligned} r = B &+ \frac{nB'}{2}(e^{t\sqrt{-1}} + e^{-t\sqrt{-1}}) - \frac{n^2 B''}{2^2}(e^{2t\sqrt{-1}} + e^{-2t\sqrt{-1}}) \\ &+ \frac{n^3 B'''}{2^3}(e^{3t\sqrt{-1}} + e^{-3t\sqrt{-1}}) - \&c. \end{aligned}$$

ou

ou bien

$$r = \mathrm{B} + 2\left(\frac{n}{2}\right)\mathrm{B}'\cos t - 2\left(\frac{n}{2}\right)^2\mathrm{B}''\cos 2t$$
$$+ 2\left(\frac{n}{2}\right)^3\mathrm{B}'''\cos 3t - 2\left(\frac{n}{2}\right)^4\mathrm{B}^{IV}\cos 4t + \&c.$$

dans laquelle on aura les valeurs ſuivantes des coëfficiens

$$\mathrm{B} = 1 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$
$$\mathrm{B}' = 1 - 3\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \frac{4.5}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4\frac{1}{2.3.4} - \&c.$$
$$\mathrm{B}'' = 1 - 4\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{2^2}{2.3} + \frac{5.6}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4\frac{2^4}{2.3.4.5} - \&c.$$
$$\mathrm{B}''' = \frac{3}{2} - 5\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{3^3}{2.3.4} + \frac{6.7}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4\frac{3^5}{2.3.4.5.6} - \&c.$$

&c.

ou bien en faiſant $\frac{n}{2} = \nu$,

$$\mathrm{B} = 1 + 2\nu^2,$$
$$\mathrm{B}' = 1 - \frac{3\nu^2}{2} + \frac{5\nu^4}{2^2.3} - \frac{7\nu^6}{2^2.3^2.4} + \&c.$$
$$\mathrm{B}'' = 1 - \frac{4.2^2\nu^2}{2.3} + \frac{6.2^4\nu^4}{2^2.3.4} - \frac{8.2^6\nu^6}{2^2.3^2.4.5} + \&c.$$
$$\mathrm{B}''' = \frac{3}{2} - \frac{5.3^3\nu^2}{2.3.4} + \frac{7.3^5\nu^4}{2^2.3.4.5} - \frac{9.3^7\nu^6}{2^2.3^2.4.5.6} + \&c.$$
$$\mathrm{B}^{IV} = \frac{4^2}{2.3} - \frac{6.4^4\nu^2}{2.3.4.5} + \frac{8.4^6\nu^4}{2^2.3.4.5.6} - \frac{10.4^8\nu^6}{2^2.3^2.4.5.6.7} + \&c.$$

&c.

XII.

Voyons maintenant comment on pourra trouver, par la même méthode, la valeur de l'angle u de l'anomalie vraie; pour cela il faudra faire, comme dans l'Art. VI, $\psi t = m \int \frac{dt}{1 + n \cos t}$, & $\psi' t = \frac{m}{1 + n \cos t}$, ce qui donnera (Art. VIII.) la fraction suivante

$$\frac{m}{z(1 + nz \sin t)(1 + n \cos t)}.$$

Or on a déjà trouvé (Art. IX.)

$$\frac{1}{z(1+nz\sin t)} = \frac{dZ}{dz}\left(\frac{1}{Z} - \frac{n}{\sqrt{-1}}e^{t\sqrt{-1}} + \frac{n^2 Z}{(\sqrt{-1})^2}e^{2t\sqrt{-1}} - \&c. + \frac{n}{\sqrt{-1}}e^{-t\sqrt{-1}} + \frac{n^2 Z}{(\sqrt{-1})^2}e^{-2t\sqrt{-1}} + \&c.\right)$$

& l'on trouvera de la même maniere, en mettant m à la place de $\sqrt{(1 - n^2)}$,

$$\frac{1}{1+n\cos t} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{n}{1+m}e^{t\sqrt{-1}} + \frac{n^2}{(1+m)^2}e^{2t\sqrt{-1}} - \&c. - \frac{n}{1+m}e^{-t\sqrt{-1}} + \frac{n^2}{(1+m)^2}e^{-2t\sqrt{-1}} - \&c.\right)$$

Donc, multipliant ces deux séries l'une par l'autre, on aura la valeur de la fraction $\frac{m}{z(1 + nz \sin t)(1 + n \cos t)}$, laquelle sera exprimée de cette maniere

$$M + M' e^{t\sqrt{-1}} + M'' e^{2t\sqrt{-1}} + M''' e^{3t\sqrt{-1}} + \&c.$$
$$+ N' e^{-t\sqrt{-1}} + N'' e^{-2t\sqrt{-1}} + N''' e^{-3t\sqrt{-1}} + \&c.$$

en

en ſuppoſant pour abréger

$$M = \frac{dZ}{Zdz}\left(1 + \frac{n^4 Z^2}{(1+m)^2 (\sqrt{-1})^2} + \frac{n^6 Z^4}{(1+m)^4 (\sqrt{-1})^4} + \&c.\right),$$

$$M' = \frac{n\,dZ}{Zdz}\left(- \frac{1}{1+m} - \frac{Z}{\sqrt{-1}} - \frac{n^2 Z^2}{(1+m)(\sqrt{-1})^2} - \frac{n^4 Z^3}{(1+m)^2 (\sqrt{-1})^3} - \&c.\right.$$
$$\left. + \frac{n^2 Z}{(1+m)^2 \sqrt{-1}} - \frac{n^4 Z^2}{(1+m)^3 (\sqrt{-1})^2} + \frac{n^6 Z^3}{(1+m)^4 (\sqrt{-1})^3} - \&c.\right)$$

$$M'' = \frac{n^2 dZ}{Zdz}\left(\frac{1}{(1+m)^2} + \frac{Z}{(1+m)\sqrt{-1}} + \frac{Z^2}{(\sqrt{-1})^2}\right.$$
$$+ \frac{n^2 Z^3}{(1+m)(\sqrt{-1})^3} + \frac{n^4 Z^4}{(1+m)^2 (\sqrt{-1})^4} + \frac{n^6 Z^5}{(1+m)^3 (\sqrt{-1})^5} + \&c.$$
$$\left. - \frac{n^2 Z}{(1+m)^3 \sqrt{-1}} + \frac{n^4 Z^2}{(1+m)^4 (\sqrt{-1})^2} - \frac{n^6 Z^3}{(1+m)^5 (\sqrt{-1})^3} + \&c.\right)$$

$$M''' = \frac{n^3 dZ}{Zdz}\left(- \frac{1}{(1+m)^3} - \frac{Z}{(1+m)^2 \sqrt{-1}} - \frac{Z^2}{(1+m)(\sqrt{-1})^2} - \frac{Z^3}{(\sqrt{-1})^3}\right.$$
$$- \frac{n^2 Z^4}{(1+m)(\sqrt{-1})^4} - \frac{n^4 Z^5}{(1+m)^2 (\sqrt{-1})^5} - \frac{n^6 Z^6}{(1+m)^3 (\sqrt{-1})^6} - \&c.$$
$$\left. + \frac{n^2 Z}{(1+m)^4 \sqrt{-1}} - \frac{n^4 Z^2}{(1+m)^5 (\sqrt{-1})^2} + \frac{n^6 Z^3}{(1+m)^6 (\sqrt{-1})^3} - \&c.\right)$$

&c.

 N'

$$N' = \frac{n\,dZ}{Z\,dz}\Big(-\frac{1}{1+m} + \frac{Z}{\sqrt{-1}} - \frac{n^2 Z^2}{(1+m)(\sqrt{-1})^2} + \frac{n^4 Z^3}{(1+m)^2(\sqrt{-1})^3} - \&c.$$

$$- \frac{n^2 Z}{(1+m)^2\sqrt{-1}} - \frac{n^4 Z^2}{(1+m)^3(\sqrt{-1})^2} - \frac{n^6 Z^3}{(1+m)^4(\sqrt{-1})^3} - \&c.\Big)$$

$$N'' = \frac{n^2 dZ}{Z\,dz}\Big(\frac{1}{(1+m)^2} - \frac{Z}{(1+m)\sqrt{-1}} + \frac{Z^2}{(\sqrt{-1})^2}$$

$$- \frac{n^2 Z^3}{(1+m)(\sqrt{-1})^3} + \frac{n^4 Z^4}{(1+m)^2(\sqrt{-1})^3} - \frac{n^6 Z^5}{(1+m)^3(\sqrt{-1})^4} + \&c.$$

$$+ \frac{n^2 Z}{(1+m)^3\sqrt{-1}} + \frac{n^4 Z^2}{(1+m)^4(\sqrt{-1})^2} + \frac{n^6 Z^3}{(1+m)^5(\sqrt{-1})^3} + \&c.\Big)$$

$$N''' = \frac{n^3 dZ}{Z\,dz}\Big(-\frac{1}{(1+m)^3} + \frac{Z}{(1+m)^2\sqrt{-1}} - \frac{Z^2}{(1+m)(\sqrt{-1})^2} + \frac{Z^3}{(\sqrt{-1})^3}$$

$$- \frac{n^2 Z^4}{(1+m)(\sqrt{-1})^4} + \frac{n^4 Z^5}{(1+m)^2(\sqrt{-1})^5} - \frac{n^6 Z^6}{(1+m)^3(\sqrt{-1})^6} + \&c.$$

$$- \frac{n^2 Z}{(1+m)^4\sqrt{-1}} - \frac{n^4 Z^2}{(1+m)^5(\sqrt{-1})^2} - \frac{n^6 Z^3}{(1+m)^6(\sqrt{-1})^3} - \&c.\Big)$$

&c.

Faiſant les ſubſtitutions & les réductions convenables (Art. VIII.), on trouvera pour la valeur de l'anomalie vraie u, une expreſſion de cette forme

$$u = t - \frac{nK'}{\sqrt{-1}}\left(e^{t\sqrt{-1}} - e^{-t\sqrt{-1}}\right) + \frac{n^2 K''}{\sqrt{-1}}\left(e^{2t\sqrt{-1}} - e^{-2t\sqrt{-1}}\right)$$

$$- \frac{n^3 K'''}{\sqrt{-1}}\left(e^{3t\sqrt{-1}} - e^{-3t\sqrt{-1}}\right) + \&c.$$

c'eſt

c'eſt à dire

$$u = t - 2nK' \sin t + 2n^2 K'' \sin 2t - 2n^3 K''' \sin 3t + 2n^4 K^{IV} \sin 4t - \&c.$$

dans laquelle les coëfficiens K', K'', K''' &c. ſeront tels que, ſi on fait en général

$$P = \frac{1}{\varrho} - \varrho\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{\varrho^3}{2^2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 - \frac{\varrho^5}{2^2 . 3^2}\left(\frac{n}{2}\right)^6 + \&c.$$

$$Q = 1 - \frac{\varrho^2}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{\varrho^4}{2^2 . 3}\left(\frac{n}{2}\right)^4 - \frac{\varrho^6}{2^2 . 3^2 . 4}\left(\frac{n}{2}\right)^6 + \&c.$$

$$R = \varrho - \frac{\varrho^3}{2 . 3}\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{\varrho^5}{2^2 . 3 . 4}\left(\frac{n}{2}\right)^4 - \frac{\varrho^7}{2^2 . 3^2 . 4 . 5}\left(\frac{n}{2}\right)^6 + \&c.$$

$$S = \varrho^2 - \frac{\varrho^4}{2 . 3 . 4}\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{\varrho^6}{2^2 . 3 . 4 . 5}\left(\frac{n}{2}\right)^4 - \frac{\varrho^8}{2^2 . 3^2 . 4 . 5 . 6}\left(\frac{n}{2}\right)^6 + \&c.$$

&c.

& qu'on dénote par P', P'', P''' &c. Q', Q'', Q''' &c. R', R'', R''' &c. les valeurs de P, Q, R &c. qui répondent à $\varrho = 1, 2, 3$ &c. on aura

$$K' = \frac{P'}{1+m} + \left(1 - \frac{n^2}{(1+m)^2}\right)\frac{Q'}{2} + n^2\left(1 + \frac{n^2}{(1+m)^2}\right)\frac{R'}{2^2(1+m)} + n^4\left(1 - \frac{n^2}{(1+m)^2}\right)\frac{S'}{2^3(1+m)^2} + n^6\left(1 + \frac{n^2}{(1+m)^2}\right)\frac{T'}{2^4(1+m)^3} + \&c.$$

 K''

$$K'' = \frac{P''}{(1+m)^2} + \left(1 - \frac{n^2}{(1+m)^2}\right)\frac{Q''}{2(1+m)}$$
$$+ \left(1 + \frac{n^4}{(1+m)^4}\right)\frac{R''}{2^2}$$
$$+ n^2\left(1 - \frac{n^4}{(1+m)^4}\right)\frac{S''}{2^3(1+m)}$$
$$+ n^4\left(1 + \frac{n^4}{(1+m)^4}\right)\frac{T''}{2^4(1+m)^2}$$
$$+ n^6\left(1 - \frac{n^4}{(1+m)^4}\right)\frac{V''}{2^5(1+m)^3} + \&c.$$

$$K''' = \frac{P'''}{(1+m)^3} + \left(1 - \frac{n^2}{(1+m)^2}\right)\frac{Q'''}{2(1+m)^2}$$
$$+ \left(1 + \frac{n^4}{(1+m)^4}\right)\frac{R'''}{2^2(1+m)}$$
$$+ \left(1 - \frac{n^6}{(1+m)^6}\right)\frac{S'''}{2^3}$$
$$+ n^2\left(1 + \frac{n^6}{(1+m)^6}\right)\frac{T'''}{2^4(1+m)}$$
$$+ n^4\left(1 - \frac{n^6}{(1+m)^6}\right)\frac{V'''}{2^5(1+m)^2}$$
$$+ n^6\left(1 + \frac{n^6}{(1+m)^6}\right)\frac{X'''}{2^6(1+m)^3} + \&c.$$

&c.

XIII.

Les valeurs des coëfficiens K', K'', K''' &c. dépendent comme l'on voit de l'excentricité n, & du rapport $1 : m$ du grand axe au petit axe de l'ellipse; or, si on suppose l'excentricité fort petite, ce qui est

est nécessaire pour que les séries soient convergentes, & qu'on veuille que les valeurs des coëfficiens soient exprimées par des séries ordonnées suivant les puissances de n, il faudra mettre à la place de m sa valeur $\sqrt{(1 - n^2)}$, & développer ensuite ce radical suivant les méthodes ordinaires; donc, comme les expressions des coëfficiens dont il s'agit ne renferment d'autres fonctions de m que les puissances de $\frac{1}{1 + m}$, il est bon de voir comment il faut s'y prendre pour réduire facilement en série chacune des puissances de $\frac{1}{1 + m} = \frac{1}{1 + \sqrt{(1 - n^2)}}$.

Qu'on demande donc en général la valeur de $\frac{1}{(1 + m)^r}$; il est facile de voir que cette valeur sera la même que celle de Z^r que nous avons donnée dans l'Art. IX. en y faisant seulement $z = 1$, ce qui rend $Z = \frac{1}{1 + \sqrt{(1 - n^2)}} = \frac{1}{1 + m}$; ainsi on aura sur le champ

$$\frac{1}{(1 + m)^r} = \frac{1}{2^r}\left(1 + r\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{r(r + 3)}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^4 + \frac{r(r + 4)(r + 5)}{2 \cdot 3}\left(\frac{n}{2}\right)^6 + \frac{r(r + 5)(r + 6)(r + 7)}{2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{n}{2}\right)^8 + \&c.\right)$$

De sorte qu'en faisant successivement $r = 1, 2, 3$ &c. & supposant pour plus de simplicité $\frac{n}{2} = \nu$, on aura

1

$$\frac{1}{1+m} = \frac{1}{2}\left(1 + v^2 + \frac{4v^4}{2} + \frac{5.6v^6}{2.3} + \frac{6.7.8v^8}{2.3.4} + \&c.\right)$$

$$\frac{1}{(1+m)^2} = \frac{1}{4}\left(1 + 2v^2 + \frac{2.5v^4}{2} + \frac{2.6.7v^6}{2.3} + \frac{2.7.8.9v^8}{2.3.4} + \&c.\right)$$

$$\frac{1}{(1+m)^3} = \frac{1}{8}\left(1 + 3v^2 + \frac{3.6v^4}{2} + \frac{3.7.8v^6}{2.3} + \frac{3.8.9.10v^8}{2.3.4} + \&c.\right)$$

$$\frac{1}{(1+m)^4} = \frac{1}{16}\left(1 + 4v^2 + \frac{4.7v^4}{2} + \frac{4.8.9v^6}{2.3} + \frac{4.9.10.11v^8}{2.3.4} + \&c.\right)$$

&c.

Ainſi il n'y aura qu'à ſubſtituer ces valeurs dans les expreſſions de K', K'', K''' &c. & après avoir fait les multiplications néceſſaires, on pourra facilement ordonner les termes par rapport aux puiſſances de n.

XIV.

Il eſt clair que la méthode employée dans ce Mémoire peut ſervir auſſi à réſoudre avec facilité les équations de la forme

$$t = x + a \sin mx + b \cos mx + c \sin nx + f \cos nx + \&c.$$

ou de celle-ci

$$t = x + ae^{mx} + be^{nx} + ce^{vx} + \&c.$$

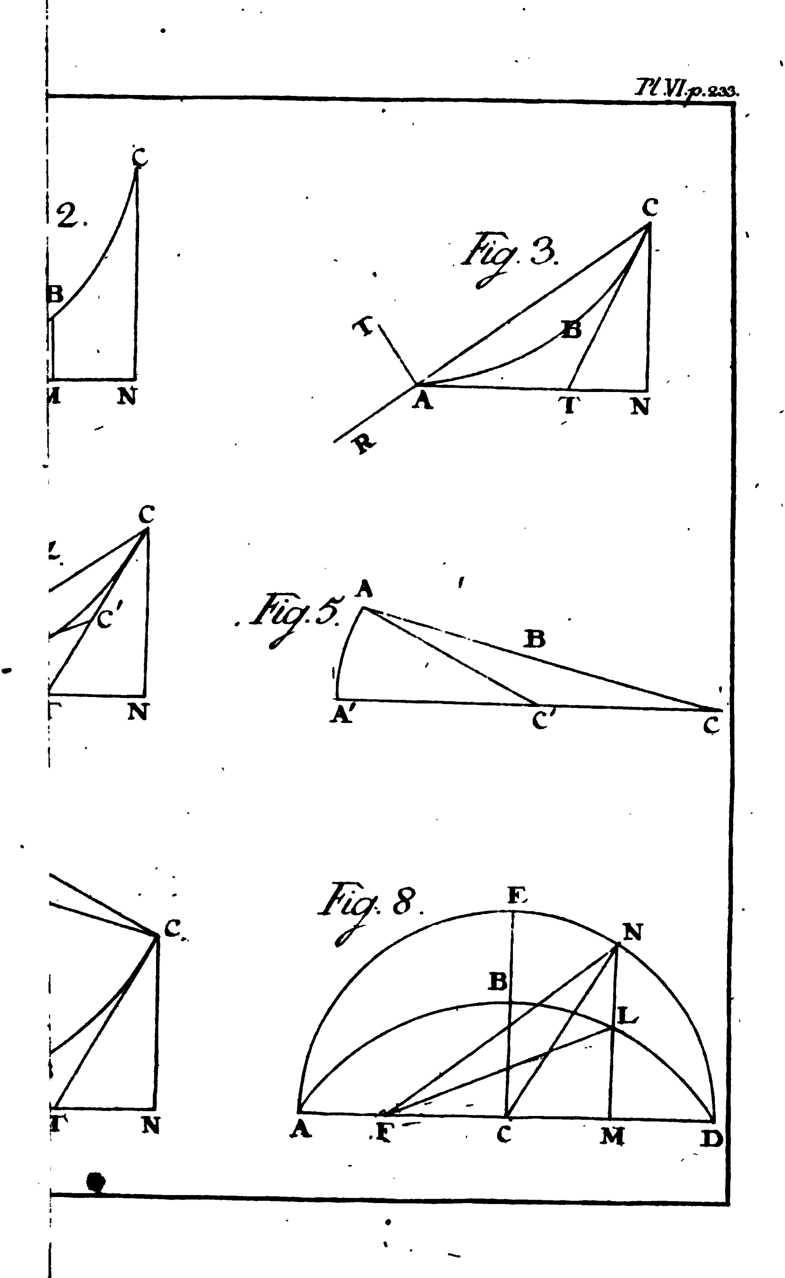
(lorsque les coëfficiens a, b, c &c. ſont fort petits,) & d'autres équations ſemblables qu'on ne pourroit réſoudre par les méthodes connues que d'une maniere indirecte & très laborieuſe.

Suppoſons, par exemple, qu'on demande la valeur de x en t par l'équation

$$t = x + ae^{mx},$$

on fera dans la formule générale de l'Art. II, $\phi x = ae^{mx}$, & $\psi x = x$, $\psi t = t$, $\psi' t = 1$; & l'on aura

$x =$



2.
C
B
M
N
Fig. 3.
C
T
B
A
T
N
R
C
C'
T
N
Fig. 5.
A
B
A'
C'
C
C.
T
N
Fig. 8.
E
N
B
L
A
F
C
M
D

$$x = t - ae^{mt} + \frac{a^2\, d.e^{2mt}}{2\,dt} - \frac{a^3\, d^2.e^{3mt}}{2.3\,dt^2} + \&c.$$

c'eſt à dire,

$$x = t - ae^{mt} + \frac{2ma^2}{2} e^{2mt} - \frac{3^2 m^2 a^3}{2.3} e^{3mt}$$

$$+ \frac{4^3 m^3 a^4}{2.3.4} e^{4mt} - \&c.$$

Donc, ſi on fait $t = 0$, en ſorte qu'il s'agiſſe de déterminer x par l'équation

$$x + ae^{mx} = 0,$$

on aura

$$x = -a\left(1 - \frac{2ma}{2} + \frac{(3ma)^2}{2.3} - \frac{(4ma)^3}{2.3.4} + \&c.\right)$$

Ainſi, ſi on avoit la ſérie

$$1 + \frac{2\alpha}{2} + \frac{(3\alpha)^2}{2.3} + \frac{(4\alpha)^3}{2.3.4} + \&c.$$

& qu'on en demandât la ſomme, il faudroit tirer la valeur de x de l'équation $x - e^{\alpha x} = 0$; & ce ſeroit la ſomme cherchée.



Dans les Mém. de 1768. pag. 136. lignes 10 & 28, au lieu de *mêmes ſignes* liſez *ſignes différens.*

SUR

LES SUITES OU SÉQUENCES

DANS

LA LOTÉRIE DE GENES. (*)

PAR MR. JEAN BERNOULLI.

Ce titre annonce un ſujet ſur lequel Mr. Euler le pere a pouſſé ſes recherches auſſi loin qu'on pouvoit l'attendre de lui, ce qui eſt tout dire: il ſera donc néceſſaire de commencer par quelques mots de juſtification.

Aimant le calcul des probabilités, je n'ai pu manquer de donner quelque attention à la Loterie qu'à mon arrivée je trouvai établie ici à l'imitation de celle de Genes, & qui offroit pluſieurs problemes, rélatifs à ce calcul, à réſoudre. Celui de trouver la probabilité des ſéquences, auxquelles il me ſembloit qu'on eût pu attacher auſſi des prix, me parut curieux ſurtout; & les difficultés que je trouvai dans la ſolution me firent juger même qu'elle pourroit n'être pas indigne de vous être préſentée.

Je m'en occupai donc de tems en tems juſqu'à ce que j'appris de Mr. Euler qu'il traitoit le même ſujet; c'en fut aſſez pour me faire aban-

(*) Ce Mémoire a été lu en 1765, après le Mémoire de Mr. Euler ſur cette matiere inſéré dans les Mémoires de l'Académie pour cette année. Comme les Mémoires de Mr. Beguelin imprimés à la ſuite de celui de Mr. Euler ſe rapportent au mien en pluſieurs endroits, & que la Loterie qui l'a occaſionné eſt plus en vogue que jamais, je ne le ſupprimerai pas plus longtems. Si ma méthode ne mene pas auſſi loin que celle de Mrs. Euler & Beguelin, elle a du moins, je crois, l'avantage d'être plus facile à ſaiſir.

abandonner mon dessein, & je me réservai seulement de voir par le Mémoire de cet illustre Géometre si j'avois raisonné juste; il a eu la bonté de me le communiquer & j'ai vû que le peu que j'avois fait, étoit fondé sur des raisonnemens qui, s'ils n'étoient pas sublimes, n'étoient du moins pas faux.

Ce n'est cependant pas immédiatement que j'en fus convaincu. Une différence dans les hypotheses en avoit occasionné une dans les résultats; elle avoit même donné lieu à embrasser des voies différentes pour y parvenir; & voilà ce qui m'enhardit, Messieurs, à vous présenter les miens.

§. 1. J'avois supposé les 90 nombres que la roue de fortune contient, & qui sont les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 90 inclusivement, rangés en cercle de maniere qu'on ne pût dire qu'il n'y a point de nombre qui précede 1, ni aucun qui suive 90. On sentira d'abord la raison de cette hypothese; outre qu'elle favorisoit ma maniere de procéder, il me paroissoit qu'elle ne manqueroit pas d'être adoptée aussi par tout directeur d'une pareille loterie, qui auroit dessein d'attacher des prix aux événemens dont il est question; car, en faisant de cette maniere que les numéros 90 & 1 forment aussi une séquence, on évite le petit inconvénient qu'il y auroit à ne pas rendre aux joueurs tous les numéros indifférens. C'est cette supposition que Mr. Euler a trouvé plus convenable de rejeter, & d'où est venue la différence dans nos résultats dont j'ai parlé.

§. 2. Avant que d'aller plus loin, je dois avertir encore que cet assemblage de deux ou de plusieurs nombres qui se suivent dans l'ordre des nombres naturels, que Mr. Euler appelle *séquence*, je l'avois nommé *suite*, & que pour distinguer les suites entr'elles, je nommois *suite binaire* celle que forment deux nombres, *suite ternaire* l'assemblage de trois nombres; *suite quaternaire* celui de 4 nombres &c. Je retiendrai cette définition; ainsi 30, 31 est une suite binaire de même que 90, 1; 30, 31, 32 sera une suite ternaire de même que 90, 1, 2 &c.

La question la plus ſimple, celle dont j'ai cru qu'il convenoit de partir, eſt celle-ci.

PROBLEME 1.

§. 3. *Suppoſé qu'on tire deux nombres des 90 Numéros qui ſont dans la roue, trouver l'eſpérance de celui qui parieroit que ces deux nombres formeront une ſuite.*

SOLUTION.

Je remarque d'abord que comme ces deux Numéros peuvent également être cenſés tirés à la fois ou l'un après l'autre, j'adopterai la ſeconde de ces hypotheſes. Cela poſé, comme il eſt indifférent quel nombre ſorte en premier lieu, le ſort du parieur dépendra du ſecond nombre qu'on tirera, & qui, ſi le premier eſt $= m$, doit être ou $m - 1$ ou $m + 1$ pour faire gagner; or le nombre de tous les cas étant 89, nous voyons qu'il y en a 2 qui font gagner le parieur; donc 87 cas le font perdre, & ſon eſpérance ſera exprimée par $\frac{2}{89}$.

PROBLEME 2.

§. 4. *Trouver la probabilité qu'il y aura ſuite binaire* (*) *dans 3 nombres tirés de la roue.*

SOLUTION.

On conſidérera premierement que le premier N°. étant indifférent, il y aura au ſecond tirage encore 89 cas dont 2 feront d'abord gagner le parieur, & dont 87 lui donneront l'eſpérance que le 3ᵉ N°. formera une ſuite; mais quelle eſt cette eſpérance? Il eſt évident que ce ne ſera pas celle que nous avons trouvée au §. préc.; car il faut faire attention: 1°. Qu'il n'y a plus que 88 Numéros dans la roue. 2°. Qu'en indiquant par m le nombre du Numéro tiré en premier lieu,

(*) Je dis *ſuite binaire*, & non pas *une ſuite binaire*, parce que je ſuppoſe qu'il n'importe pas combien de ces ſuites les numéros ſortis pourront former, & qu'il eſt indifférent au parieur combien il en ſortira.

lieu, si celui du second Numéro est plus grand que $m + 2$ ou plus petit que $m - 2$, il y aura 4 cas du troisieme tirage qui feront gagner le parieur; mais si le nombre du second billet est $m + 2$ ou $m - 2$, il n'y en aura que 3. Je raisonnerai donc de la maniere suivante. Si les nombres des billets déjà tirés different entr'eux de plus de 2, il y en aura 4 des 88 restans qui feront gagner le parieur

& son espérance sera $= \frac{2 + 87 \times \frac{4}{88}}{89} = \frac{176 + 348}{88 \times 89} = \frac{524}{88 \times 89}$; mais, si les dits nombres ne se surpassent l'un l'autre que de 2, l'espérance du parieur sera $= \frac{2 + 87 \times \frac{3}{88}}{89} = \frac{176 + 261}{88 \times 89} = \frac{437}{88 \times 89}$. Or, de 89 cas qui ont pu arriver au tirage du second numéro, on sait déjà qu'il y en a 2 qui n'ont pas eu lieu, savoir ceux où le nombre de ce billet auroit été indiqué par $m - 1$, ou par $m + 1$, (autrement il y auroit déjà eu *suite*, & il s'agit ici des cas où il n'y en a pas eu,) & des 87 cas restans il y en a 2 où le nombre du second numéro est exprimé par $m - 2$, ou par $m + 2$, & qui font le sort du parieur proportionel à $\frac{437}{88 \times 89}$ comme on a vu, & 85 où le second numéro n'est indiqué ni par $m - 2$, ni par $m + 2$, & où le sort du parieur est proportionel à $\frac{524}{88 \times 89}$; donc enfin l'espérance totale cherchée du joueur sera exprimée par

$$\frac{2\times\frac{437}{88\times89}+85\times\frac{524}{88\times89}}{87}=\frac{2\times\frac{437}{88\times89}+\frac{85\times437}{88\times89}+\frac{85\times87}{88\times89}}{87}$$

$$=\frac{\frac{87\times437}{88\times89}+\frac{85\times87}{88\times89}}{87}=\frac{437+85}{88\times89}+\frac{522}{88\times89}=\frac{2\times3\times87}{88\times89}.$$

Je remarquerai que c'eſt ainſi qu'il falloit s'y prendre en ſuppoſant 2 numéros déjà tirés. Nous allons indiquer une ſolution plus commode où l'on ſuppoſe que le ſecond numéro ne ſoit pas tiré encore. Il ſera inutile de faire obſerver que le réſultat doit être le même.

Soit le nombre du premier billet $= m$. Quand on tire le ſecond billet, il y aura 2 cas, ſavoir $m - 1$, & $m + 1$, qui feront d'abord gagner le ponte: il y en a 2 autres, $m - 2$ & $m + 2$, qui lui donneront, comme nous avons vu, l'eſpérance $\frac{3}{88}$. Tous les autres cas, dont le nombre eſt 85, rendent l'eſpérance $= \frac{4}{88}$. On a donc $\frac{2\times1+2\times\frac{3}{88}+85\times\frac{4}{88}}{89}=\frac{176+6+340}{88\times89}$

$=\frac{522}{88\times89}=\frac{2\times3\times87}{89\times88}$, comme ci-deſſus.

LEMME PREMIER.

§. 5. *Trouver la probabilité qu'il y a, qu'en tirant au ſort 3 numéros d'entre les 90 de la loterie, les nombres de ces 3 numéros ſe ſuivent dans l'ordre d'une progreſſion arithmétique dont la différence eſt 2.*

SOLU-

SOLUTION.

Il eſt clair que le premier numéro qui ſortira eſt indifférent; nous ſuppoſerons donc ſon nombre $= m$; & nous remarquerons que de 89 cas qui peuvent arriver il n'y en a que quatre qui avec le troiſieme numéro peuvent produire la progreſſion, ſavoir $m - 2$, $m + 2$, $m - 4$, $m + 4$; imaginons nous que l'un des deux premiers ait eu lieu au ſecond tirage, il y aura au troiſieme, deux cas de 88, qui feront réuſſir la progreſſion, & la probabilité ſera $= \frac{2}{88}$. Si c'eſt $m - 4$ ou $m + 4$ qui eſt ſorti, il n'y aura qu'un cas qui produira la progreſſion, & la probabilité ſera exprimée par $\frac{1}{88}$. Donc au ſecond tirage il y aura 2 cas qui donnent $\frac{2}{88}$, 2 cas qui donnent $\frac{1}{88}$, & 85 qui donnent zéro; la probabilité cherchée ſera par conſéquent $= \frac{2 \times \frac{2}{88} + 2 \times \frac{1}{88} + 85 \times 0}{89} = \frac{6}{88 \times 89}$.

LEMME SECOND.

§. 6. *Trouver la probabilité qu'en tirant au ſort trois numéros d'entre les 90, il y en aura deux qui différeront entr'eux de 2 unités, & que le troiſieme différera de plus de 2 de l'un & de l'autre des précédens* (*).

SOLUTION.

Suppoſons le nombre du premier billet qu'on tire $= m$, & voyons quelles ſeront les différentes probabilités que les 89 cas reſtans feront

(*) On voit bien que par cette derniere hypotheſe les ſuites binaires ſont exclues, & feroient perdre celui qui parieroit pour l'évenement; il étoit inutile d'attacher cette condition au Lemme précédent, parce qu'une ſuite auroit rendu la probabilité de l'évenement nulle, ce qui n'eſt pas ici quand on demande ſimplement que 2 ſeulement des 3 numéros tirés different de deux unités. Au reſte on ne tardera gueres à voir les raiſons de cette hypotheſe.

feront naître au second tirage. Je dis d'abord qu'il y aura 2 cas qui donnent o, ce sont ceux où le second numéro est $m + 1$ ou $m - 1$; ensuite, si ce second numéro est $m + 2$ ou $m - 2$, ces deux cas donneront l'expectation $\frac{83}{88}$; en troisieme lieu, si le second numéro est $m + 3$ ou $m - 3$, $m + 4$ ou $m - 4$, la probabilité sera $= \frac{2}{88}$, qui est donc produite par 4 cas; enfin les 81 cas restans, où la différence entre les 2 premiers numéros surpasse 4, donneront $\frac{4}{88}$; par conséquent la probabilité cherchée est $=$

$$\frac{2 \times 0 + 2 \times \frac{83}{88} + 4 \times \frac{2}{88} + 81 \times \frac{4}{88}}{89} = \frac{498}{88 \times 89}.$$

Corollaire.

§. 7. On trouvera aussi la probabilité que les trois numéros qu'on tirera différeront de plus de 2, en ajoutant ensemble les résultats des solutions du Probleme 2e, & des deux Lemmes précédens, & en retranchant cette somme de l'unité; car la dite somme étant $\frac{1026}{88 \times 89}$, si on la retranche de 1, le résidu $\frac{6806}{88 \times 89}$ exprimera la probabilité dont il s'agit.

PROBLEME 3.

§. 8. *Trouver la probabilité que, dans 4 numéros qu'on tire de 90, il se trouvera au moins une suite binaire.*

SOLUTION.

La solution de ce probleme se déduit facilement de ce qui précede: nous n'avons qu'à remarquer qu'en vertu du §. 4. il y a $\frac{522}{7832}$

de

de probabilité qu'il sortira une suite dans les trois premiers numéros, & qu'ainsi il y aura 522 cas qui donnent l'espérance 1, & 7310 qui permettent d'espérer que le quatrieme numéro formera une suite avec un des précédens. Mais ces 7310 cas ne donnent pas tous la même probabilité; elle varie suivant la disposition que les 3 numéros tirés en premier lieu gardent entr'eux. Car *a*) si ces 3 numéros se suivent dans une progression arithmétique dont la différence est 2, il n'y aura que 4 cas, de 87 possibles au quatrieme tirage, qui feront gagner celui qui parieroit pour la suite.

b) Si 2 seulement des trois numéros précédens different entr'eux de 2 unités, & que la différence du troisieme à ceux-là soit plus grande, l'espérance du parieur sera proportionelle à $\frac{5}{87}$, y ayant alors 5 cas qui le feront gagner.

c) Enfin, si les 3 numéros déjà tirés different tous de plus de 2 l'un de l'autre, 6 cas tourneront à l'avantage du parieur, & son expectation sera exprimée par $\frac{6}{87}$.

Or nous avons trouvé au §. 6. que la probabilité de l'événement

de *a* est $= \frac{6}{88 \times 89}$.

au §. 7. celle de - - *b* - $= \frac{498}{88 \times 89}$,

au §. 8. celle de - - *c* - $= \frac{6806}{88 \times 89}$.

 Ainsi

Ainsi la probabilité que nous cherchons sera $=$

$$\frac{522 \times 1 + 6 \times \frac{4}{87} + 498 \times \frac{5}{87} + 6806 \times \frac{6}{87}}{88 \times 89} = \frac{88764}{87 \times 88 \times 89}$$

$$= \frac{3 \times 4 \times (86^2 + 1)}{87 \times 88 \times 89}.$$

PROBLEME 4.

§. 9. *Trouver la probabilité que dans 5 nombres qu'on tire, il y aura au moins une suite binaire.*

SOLUTION.

Pour résoudre cette question, il faut faire attention que de $89 \times 88 \times 87$ cas ou de 681384 cas, il y en a 88764 qui donnent une suite dans les quatre premiers numéros qu'on tire, mais, que si ces 4 numéros ne forment pas de séquence, ils seront nécessairement disposés entr'eux d'une des 5 manieres qui suivent.

α) Ou les 4 numéros forment une progression arithmétique dont la différence est 2.

β) Ou 3 d'entr'eux forment cette progression, & le quatrieme differe de plus de 2 unités de tous les autres.

γ) Ou 2 des 4 numéros différeront de deux unités l'un de l'autre, & les deux autres de même, mais tellement qu'il y ait au moins une différence de 3 entre ces deux paires.

δ) Ou 2 numéros différeront entr'eux de 2, & la différence des deux autres tant entr'eux qu'à chacun de ceux-là sera plus grande.

ε) Ou tous les 4 numéros différeront au moins de 3 unités l'un de l'autre.

Voilà

Voilà donc 5 cas dont il convient avant toute chose de chercher la probabilité, parce que, excepté le troisieme, ils rendent tous l'espérance d'une suite, au cinquieme tirage, différente. On pourroit à la vérité se dispenser de faire le calcul pour la derniere disposition, qui est le plus prolixe, ou bien ceux que demandent les cas β & γ, qui donnent la même probabilité; mais comme dans l'énumération de tant de cas on peut facilement commettre quelque erreur, j'ai préféré de faire le calcul pour toutes les cinq dispositions, afin de m'assurer de la justesse de ma solution.

1°. Je remarque d'abord, quant à la premiere disposition, que nous avons vu au §. 5. qu'il y a $\frac{6}{7832}$ de probabilité que les 3 premiers numéros formeront une progression arithmétique où la différence soit 2. De 7832 cas il y en a donc 6 qui donnent $\frac{2}{87}$ de probabilité. Voyons quelle espérance reste quand les trois premiers numéros ne sont pas en progression. Soit le nombre du premier billet exprimé par m, l'espérance sera toujours nulle à moins que celui du second billet ne soit un des six suivans

$$m - 2, \quad m + 2, \quad m - 4, \quad m + 4, \quad m - 6, \quad m + 6.$$

Supposé, par ex. que le second numéro soit $m + 2$; comme la progression est exclue dans les 3 premiers numéros, il n'y a que $m + 6$ & $m - 4$ qui puissent la faire réussir, y ayant alors $\frac{1}{87}$ de probabilité que le quatrieme numéro formera la progression.

Or, pour ces deux cas $m + 6$ & $m - 4$, il y a $\frac{2}{88}$ d'espérance; on voit donc que de 89 cas qui peuvent avoir lieu au second tirage

tirage, il y en a 6 qui donnent $\frac{2}{88}$, & 82 qui donnent o, & que par conséquent l'expectation pour le cas α est $=$

$$\frac{6 \times \frac{2}{87} + 12 \times \frac{1}{87} + 7814 \times 0}{88 \times 89} = \frac{24}{89 \times 88 \times 87}.$$

2°. On pourroit calculer la probabilité de la disposition β par la méthode que j'emploîrai dans la suite, mais c'est une peine qu'on peut s'épargner en observant qu'il doit nécessairement y avoir 81 fois autant de cas pour cette disposition qu'il y en avoit pour la précédente, & qu'ainsi on ne peut que trouver la probabilité $\frac{24 \times 81}{89 \times 88 \times 87}$, ou $\frac{1944}{89 \times 88 \times 87}$.

3°. Pour répondre à la question: Quelle est la probabilité que les 4 premiers numéros seront disposés entr'eux de la maniere γ? je supposerai d'abord que m soit le premier numéro qui sort, & je dirai: il y a deux cas au second tirage, où la probabilité est nulle, ce sont ceux où le second numéro qu'on tire est $m - 1$ ou $m + 1$. J'examine ensuite quelle est la probabilité quand le second numéro est $m - 2$ ou $m + 2$. Supposons que ce soit $m + 2$; je dis que de 88 cas qui peuvent avoir lieu, il y en a 5 où la probabilité est o, à savoir $m - 2$, $m - 1$, $m + 1$, $m + 3$, & $m + 4$, parce qu'ici il ne doit y avoir, ni une suite, ni une progression, comme dans les dispositions α & β. Je dis de plus qu'il y a 4 cas, $m + 5$ & $m + 6$, $m - 5$ & $m - 6$, qui donnent $\frac{1}{87}$ de probabilité que le 4 numéro fera réussir la disposition

en

en queſtion; enfin que les 79 cas reſtans donnent $\frac{2}{87}$ de probabilité pour cette diſpoſition des nombres après le quatrieme tirage. D'où je conclus que, ſi le ſecond numéro eſt $m - 2$ ou $m + 2$, la probabilité pour la diſpoſition γ eſt $\frac{162}{87 \times 88}$, & en réfléchiſſant de la même maniere ſur tous les cas, je trouve que ſi

le 2ᵉ. N°. eſt $m - 3$ ou $m + 3$ la probabilité eſt $= \frac{2}{87 \times 88}$,

. . . $m - 4$ ou $m + 4$ . . . $= \frac{2}{87 \times 88}$,

. . . $m - 5$ ou $m + 5$ . . . $= \frac{6}{87 \times 88}$,

. . . $m - 6$ ou $m + 6$ . . . $= \frac{6}{87 \times 88}$,

. . . $m - 7$ ou $m + 7$ . . . $= \frac{8}{87 \times 88}$.

Tous les autres cas donnent la même probabilité $\frac{8}{87 \times 88}$; & partant, avant qu'on ait tiré aucun numéro, la probabilité pour la diſpoſition γ

$$\text{eſt} = \frac{2 \times 0 + 2 \times \frac{162}{87 \times 88} + 4 \times \frac{2}{87 \times 88} + 4 \times \frac{6}{87 \times 88} + 77 \times \frac{8}{87 \times 88}}{89}$$

$$= \frac{972}{89 \times 88 \times 87}.$$

4°. On trouvera de même la probabilité pour le cas de δ en parcourant ſcrupuleuſement tous les cas, tant ceux qui ſont évanouir

 l'eſpé-

l'espérance de la disposition, que ceux qui produisent la disposition, dans les trois tirages qui suivent le premier, jusqu'à ce qu'on trouve la probabilité après le second tirage constante. On verra que si

le 2^d. N°. est $m - 2$ ou $m + 2$ la probabilité est $= \frac{6480}{87 \times 88}$,

. . . $m - 3$ ou $m + 3$ . . . $= \frac{480}{87 \times 88}$,

. . . $m - 4$ ou $m + 4$ . . . $= \frac{474}{87 \times 88}$,

. . . $m - 5$ ou $m + 5$ . . . $= \frac{788}{87 \times 88}$,

. . . $m - 6$ ou $m + 6$ . . . $= \frac{782}{87 \times 88}$,

. . . $m - 7$ ou $m + 7$ . . . $= \frac{776}{87 \times 88}$,

La même probabilité que nous venons d'indiquer pour $m - 7$ & $m + 7$, se trouve pour tous les cas suivans du second tirage, de sorte que l'expectation que les 4 numéros seront disposés de la maniere δ, sera exprimée par cette quantité

$$2 \times 0 + 2 \times \frac{6480}{87 \times 88} + 2 \times \frac{480}{87 \times 88} + 2 \times \frac{474}{87 \times 88}$$
$$+ 2 \times \frac{788}{87 \times 88} + 2 \times \frac{782}{87 \times 88} + 77 \times \frac{776}{87 \times 88}$$

qui se réduit à $\frac{77760}{89 \times 88 \times 87}$.

5°. Il nous reste à déterminer la probabilité que tous les 4 nombres qu'on tire en premier lieu différeront de plus de 2 entr'eux. On

On remarquera qu'ici il y a 4 cas qui d'abord donnent zéro au second tirage, ce sont les numéros $m - 1$, $m + 1$, $m - 2$, $m + 2$. Passant ensuite aux suivans, comme nous avons fait jusqu'ici, on verra que si

le 2^d. N°. est $m - 3$ ou $m + 3$ la probabilité est $= \frac{6320}{87 \times 88}$,

- - - $m - 4$ ou $m + 4$ - - - $= \frac{6162}{87 \times 88}$,

- - - $m - 5$ ou $m + 5$ - - - $= \frac{6006}{87 \times 88}$,

- - - $m - 6$ ou $m + 6$ - - - $= \frac{6010}{87 \times 88}$,

- - - $m - 7$ ou $m + 7$ - - - $= \frac{6012}{87 \times 88}$.

C'est encore à ces deux cas que la probabilité devient constante, quoiqu'au commencement, je veux dire pour $m - 8$ & $m - 9$, $m + 8$ & $m + 9$, les termes qui constituent la probabilité soient différens. La même chose arrive aussi dans les calculs pour les autres dispositions des 4 numéros, comme on le verra en vérifiant les résultats que je n'ai fait qu'indiquer ici. On a donc enfin

$$\frac{4 \times 0 + 2 \times \frac{6320}{87 \times 88} + 2 \times \frac{6162}{87 \times 88} + 2 \times \frac{6006}{87 \times 88} + 2 \times \frac{6010}{87 \times 88} + 2 \times \frac{6012}{87 \times 88}}{89}$$

$= \frac{511920}{89 \times 88 \times 87}$. Voilà donc tous les différens cas qui influent sur la probabilité que nous cherchons, développés, & la somme de tous ces numérateurs se trouvant égale au produit de $89 \times 88 \times 87$, prouve que l'énumération a été exacte, (à moins que par hazard une erreur n'en eût détruit une autre.) Il ne nous reste donc qu'à passer à la solution

lution complete de notre probleme; elle ne renferme plus rien d'épineux; il suffira de faire attention que les quatre premiers numéros étant tirés sans renfermer une séquence, s'ils sont disposés de la maniere α, il y aura au cinquieme tirage $\frac{5}{86}$ de probabilité que ce cinquieme numéro formera une suite avec un ou deux des précédens. Que si la disposition β ou γ, a lieu cette probabilité sera $= \frac{6}{86}$,

si c'est δ . . . . $\frac{7}{86}$,

. . . . $\frac{8}{86}$.

Et l'on conclura de là que la probabilité qu'on cherche dans le probleme est

$$= \frac{88674 \times 1 + 24 \frac{5}{86} + 2916 \times \frac{6}{86} + 77760 \times \frac{7}{86} + 511920 \times \frac{8}{86}}{89 \times 88 \times 87}$$

$$= \frac{88674 + 120 + 17496 + 544320 + 4095360}{89 \times 88 \times 87 \times 86}$$

$$= \frac{12291000}{89 \times 88 \times 87 \times 86} = \frac{4 \times 5 \times (85^3 + 5 \times 85)}{89 \times 88 \times 87 \times 86}.$$

C'est la décomposition la plus simple que le numérateur de notre fraction admette.

§. 10. En entreprenant la solution du §. préc. j'en prévoyois la prolixité, mais je me flattois que le résultat comparé avec ceux que j'avois trouvés précédemment m'indiqueroit une loi pour les probabilités des suites binaires contenues dans un nombre quelconque de billets qu'on tireroit, de maniere qu'on pût trouver ces résultats sans autre calcul & les ranger dans la premiere colonne verticale d'une table. Mais

Mais j'ai vû qu'il falloit plutôt chercher cette loi dans les termes qui expriment ces probabilités avant qu'on les ait sommés. Pour être plus clair, je mettrai sous les yeux les résultats trouvés jusqu'ici, tels qu'ils étoient avant la réduction.

La solution du Probleme 1^r. a donné $\frac{2\times 1 + 87\times 0}{89}$,

celle du Probl. 2^d. $\frac{2\times 1 + 2\times\frac{3}{88} + 85\times\frac{4}{88}}{89}$,

celle du Probl. 3e. $\frac{522\times 1 + 6\times\frac{4}{87} + 6\times 83\times\frac{5}{87} + 82\times 83\times\frac{6}{87}}{88\times 89}$,

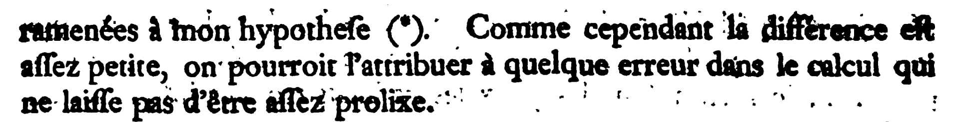
celle du Probl. 4e.

$$\frac{88674\times 1 + 24\times\frac{5}{86} + 6\times 6\times 81\times\frac{6}{86} + 12\times 80\times 81\,\frac{7}{86} + 79\times 80\times 81\times\frac{8}{86}}{89\times 88\times 87}$$

En comparant ces quantités ensemble, il me paroissoit qu'on pouvoit prononcer hardiment que la probabilité qu'il y auroit une suite binaire en 6 numéros seroit exprimée par la somme des termes suivans:

$$\Big(12291000\times 1 + 120\times\frac{6}{85} + 6\times 6\times 6\times 79\times\frac{7}{85}$$
$$+ 12\times 12\times 78\times 79\times\frac{8}{85} + 20\times 77\times 78\times 79\times\frac{9}{85}$$
$$+ 76\times 77\times 78\times 79\times\frac{10}{85}\Big) : 89\times 88\times 87\times 86.$$

Mais j'avoue que la somme ne s'est pas trouvée la même que le résultat que donnent les formules de Mr. Euler, que j'ai dit pouvoir être rame-


ramenées à mon hypothese (*). Comme cependant la différence est assez petite, on pourroit l'attribuer à quelque erreur dans le calcul qui ne laisse pas d'être assez prolixe.

§. 11. Ce n'est pas que les résultats manquent entierement de régularité; on n'a qu'à jetter les yeux sur les 4 qu'ont donnés mes solutions, & sur les 2 que j'ai calculés d'après les formules de Mr. Euler, pour s'en convaincre; les voici:

Pro-

(*) Voici comment cela se fait: Mr. Euler trouve que, si d'un nombre quelconque n de billets on en tire 2 ou 3 ou 4 ou 5 &c. les probabilités qu'il ne se trouvera aucune séquence dans ces numéros tirés seront

Pour 2 Numéros $= \frac{n-2}{n}$,

- 3 - - $= \frac{(n-3).(n-4)}{n.(n-1)}$,

- 4 - - $= \frac{(n-4).(n-5).(n-6)}{n.(n-1).(n-2)}$,

- 5 - - $= \frac{(n-5).(n-6).(n-7).(n-8)}{n.(n-1).(n-2).(n-3)}$,

&c. &c.

Par conséquent les probabilités que les numéros tirés renfermeront au moins une séquence seront

Pour 2 Numéros $= 1 - \frac{n-2}{n}$,

- 3 - - $= 1 - \frac{(n-3).(n-4)}{n.(n-1)}$,

- 4 - - $= 1 - \frac{(n-4).(n-5).(n-6)}{n.(n-1).(n-2)}$,

- 5 - - $= 1 - \frac{(n-5).(n-6).(n-7).(n-8)}{n.(n-1).(n-2).(n-3)}$,

&c. &c.

Or

Probabilités d'une séquence au moins:

En 2 Numéros $= \frac{2}{89}$,

3 . . $= \frac{2 \times 3 \times 87}{89 \times 88}$,

4 . . $= \frac{3 \times 4 \times ((86)^2 + 1)}{89 \times 88 \times 87}$,

5 . . $= \frac{4 \times 5 \times ((85)^3 + 5 \times 85)}{89 \times 88 \times 87 \times 86}$,

6 . . $= \frac{5 \times 6 \times ((84)^4 + 3 \times 5 \times 84^2) + 8}{89 \; . \; . \; . \; 85}$,

7 . . $= \frac{6 \times 7 \times \left((83)^5 + 5 \times 7 \times \left((83)^3 - \frac{12}{5} \times 83\right)\right)}{89 \; . \; . \; . \; 84}$,

Mais on aura de la peine à appercevoir là dedans une loi invariable.

Ii 2 §. 12.

Or, pour ramener ces formules à notre Hypothese, il suffit de substituer partout $n - 1$ au lieu de n; car on aura alors les probabilités d'une séquence au moins dans

2 Numéros $= 1 - \frac{(n - 3)}{n - 1}$,

3 . . $= 1 - \frac{(n - 4).(n - 5)}{(n - 1).(n - 2)}$,

4 . . $= 1 - \frac{(n - 5).(n - 6).(n - 7)}{(n - 1).(n - 2).(n - 3)}$,

5 . . $= 1 - \frac{(n - 6).(n - 7).(n - 8).(n - 9)}{(n - 1).(n - 2).(n - 3).(n - 4)}$,

&c. &c.

Et faisant dans ces quantités $n = 90$, on parvient aux résultats que les solutions de nos problemes ont donnés.

§. 12. J'ai pensé que peut-être en supposant, comme Mr. Euler a fait, que les séquences finissent au N°. 90. il y auroit plus de simplicité dans les résultats, & pour m'en éclaircir j'en ai calculé six d'après le Mémoire de Mr. Euler; mais je n'ai trouvé qu'une analogie surprenante entre tous ces résultats & les miens, comme on va le voir.

Nombre des billets tirés.	Probabilités d'une séquence.
2	$\frac{2}{90}$
3	$\frac{2 \times 3 \times 88}{90 \times 89}$,
4	$\frac{3 \times 4 \times ((87)^2 + 1)}{90 \times 89 \times 88}$,
5	$\frac{4 \times 5 \times ((86)^3 + 5 \times 86)}{90 \ldots 87}$,
6	$\frac{5 \times 6 \times ((85)^4 + 3 \times 5 \times (85)^2 + 8)}{90 \ldots 86}$,
7	$\frac{6 \times 7 \times \left((84)^5 + 5 \times 7 \left((84)^3 + \frac{12}{5} \times 84\right)\right)}{90 \ldots 85}$,

La raison de cette uniformité me paroit digne d'être approfondie (*).

§. 13. Quoi qu'il en soit, cette prolixité dans laquelle on est obligé de s'engager avant que de parvenir à quelque chose de certain, & l'application plus facile des formules de Mr. Euler m'ont empêché de pousser

(*) Les Mémoires de Mr. Beguelin ne laissent rien à désirer sur la comparaison des deux hypotheses. On y trouve de plus une multitude d'idées ingénieuses, & plusieurs simplifications.

pousser plus loin les recherches que j'avois commencées sur les probabilités des suites de plus de 2 nombres; & je n'ai pas dessein d'y revenir, à moins que je ne croye voir dans cette matiere une utilité plus immédiate. Je me contenterai de faire remarquer encore, que les premiers termes significatifs des colonnes verticales de la table que je me proposois de construire, se trouvent plus aisément par le principe fondamental de la doctrine des combinaisons que par aucune autre méthode. Je suppose, par ex. qu'on cherche la probabilité que 5 nombres qu'on tire formeront une suite quinaire. On sait que 90 nombres peuvent être combinés 5 à 5 de $\frac{86 \times 87 \times 88 \times 89 \times 90}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$ manieres différentes: or il y a 90 cas où la suite quinaire réussit, (depuis 1. 2. 3. 4. 5 jusqu'à 90. 1. 2. 3. 4); la probabilité qu'on chercheroit seroit donc $= \frac{90}{\frac{86 \times 87 \times 88 \times 89 \times 90}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}} = \frac{120}{86 \times 87 \times 88 \times 89}$.

On auroit pu trouver de la même maniere la probabilité qu'on cherchoit au §. 5. & celle de la disposition α du §. 9. Car on n'aura pas de peine à comprendre qu'en tirant 3 numéros d'entre 90, il doit y avoir la même probabilité que ces 3 nombres formeront une progression arithmétique differente de celle qu'ils produisent en formant une suite ternaire. Et il en est de même de l'autre cas.



EXTRAIT D'UNE LETTRE
DE M. D'ALEMBERT À M. DE LA GRANGE. (*)

I.

J'ai lu avec beaucoup de satisfaction les excellentes recherches de Mr. Beguelin sur les lunettes achromatiques, dans le Tome XVIII de vos Mémoires. J'ai examiné d'où peut provenir l'aberration de $21'$ qu'il trouve (p. 404.) dans un de mes objectifs; & j'ai reconnu que les dimensions des rayons, exprimées en R, sont exactes, mais que la distance focale, au lieu d'être $\frac{R}{1+\frac{1}{60}}$, comme je l'ai dit, doit être $\frac{R}{1+\frac{1}{6}}$, par la raison que la quantité qui est $0,4\nu$ (Mém. Acad. des Scienc. de Paris 1764. p. 131) est $= \frac{4\nu}{10}$ ou $\frac{40\nu}{100}$, & qu'ainsi $\frac{0,4\nu}{0,15}$ n'est pas $=$ à $\frac{4\nu}{15}$, comme je l'ai écrit par inadvertence, mais à $\frac{40\nu}{15}$; de sorte que, si $\nu = -\frac{1}{16}$, on a $-\frac{0,4\nu}{0,15} = \frac{1}{6}$, & non pas $\frac{1}{60}$. Si donc on veut exprimer les rayons, non par R, mais par

(*) Du 13 Nov. 1769.

par la distance focale R′ ou F, on mettra $F\left(1+\frac{1}{6}\right)$ au lieu de R dans l'expression des rayons, & alors tout sera d'accord. C'est pourquoi les valeurs des rayons, exprimées en F par Mr. Beguelin, doivent être multipliées par $\frac{1+\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{60}} = \frac{70}{61} = 1,1475$, & la vraie distance focale est $\frac{R}{1+\frac{1}{6}} = \frac{R}{1,1666}$, à très peu près comme le trouve Mr. Beguelin; la petite différence qui reste encore, vient uniquement de ce que, dans l'expression des rayons des lentilles, la derniere décimale n'est exacte & ne peut l'être qu'à une fraction près. La construction que j'ai donnée subsiste donc, en remarquant seulement que la distance focale est $\frac{6R}{7}$; en sorte que, si R = 3 pieds & demi, par exemple, la distance focale sera 3 pieds. Quant à l'aberration de 0′, 18575 que Mr. Beguelin trouve encore dans l'objectif après cette correction, j'y reviendrai dans un moment, après vous avoir parlé de celle qu'il trouve dans un des objectifs de feu Mr. Clairaut.

2. Ayant examiné d'où peut provenir cette énorme aberration de 1°. 17′, & l'erreur dans la distance focale en raison de 2,571626 à 1, je crois en avoir trouvé la cause, en supposant le reste des calculs très exact, dans l'équation $\frac{R}{a} - \frac{R}{b} = \frac{10}{3}$, que donne Mr. Clairaut dans les Mém. de 1762, p. 630. & qui est fausse. Car, d'après ses propres calculs, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$; & p. 629. R = − 4f;

$- 4f$; donc $\frac{R}{a} - \frac{R}{b} = - 4$, & non $\frac{10}{3}$. C'eſt pourquoi $\frac{R}{a}$ étant $=$ (p. 631.) à $1,2636$, on aura $\frac{R}{b} = 5,2636$. Il faut de plus remarquer que R (p. 629.) $= - 4f$, & que $f = \frac{3R'}{10}$, R' étant la diſtance focale; en ſorte que R eſt négative & $= - 1,2R'$. Ainſi, dans la ſuppoſition préſente, que la ſeule équation $\frac{R}{a} - \frac{R}{b} = \frac{10}{3}$ ſoit fauſſe, la premiere & la derniere ſurface, au lieu d'être convexes, comme le veut Mr. Clairaut, doivent être concaves, c'eſt à dire que le premier & le troiſième verre ſont deux meniſques, dont la concavité eſt tournée vers l'objet; les rayons a, b, ſont donc $- \frac{10000}{12636} \times 1,2R'$, & $- \frac{10000}{52636} \times 1,2R'$, R' étant la diſtance focale. La cauſe de toutes ces mépriſes de Mr. Clairaut, vient de ce qu'au lieu de prendre $\frac{1}{f} = \frac{10}{3R'}$, il a pris $\frac{1}{f} = \frac{10}{3R}$; ce qui eſt fort différent.

3. En ſuppoſant toujours vrais les autres calculs de Mr. Clairaut, on devroit avoir ici, par la formule connue des diſtances focales, $\frac{1}{R'} = 0,55 \times 2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - 0,6 \times \frac{2}{0,45R'}$, ou en mettant pour $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ſa valeur ſuppoſée $\frac{10}{3R} = - \frac{10}{3R' \times 1,2}$, une quantité poſitive égale à une négative, ce qui eſt abſurde. On devroit

vroit avoir de même, pour l'équation qui donne la destruction des couleurs $2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)-\frac{3}{2}\times\frac{2}{0,45\,R'}=0$, ou $-\frac{10}{3\times 1,2}-\frac{3}{2\times 0,45}=0$, ce qui est encore absurde. On ne trouveroit gueres mieux son compte en faisant avec Mr. Clairaut R positif dans le calcul du rayon de la premiere surface, quoiqu'il doive réellement être négatif d'après ses calculs analytiques. On voit donc qu'à tous égards les dimensions de cette lunette sont très fautives, & que l'aberration de réfrangibilité ainsi que celle de sphéricité n'y seroient point détruites. Je ne dois pas oublier de remarquer que Mr. Beguelin prend $R = 1,2\,R'$, au lieu de $R = -1,2\,R'$, en quoi il a sans doute été trompé par la fausse construction de Mr. Clairaut, qui a pris R positif dans le calcul du rayon de la premiere surface.

4. J'ai supposé jusqu'ici que l'équation $\frac{R}{a}-\frac{R}{b}=\frac{10}{3}$ étoit la seule fautive dans les calculs de Mr. Clairaut; mais il y a beaucoup d'apparence que l'équation du second degré qui lui donne l'aberration de sphéricité égale à zéro, n'est pas exacte non plus, & qu'il faut mettre dans cette équation $\frac{R'}{a}$ & $\frac{R'^2}{a^2}$ au lieu de $\frac{R}{a}$ & de $\frac{R^2}{a^2}$. Cela paroît plus que vraisemblable si on jette les yeux sur les calculs qui terminent la page 629, & où il me semble que Mr. Clairaut a mis par mégarde R au lieu de R'. Dans cette supposition, il faudroit, au lieu de l'équation $\frac{R}{a}-\frac{R}{b}=\frac{10}{3}$ qui est fausse, prendre l'équation véritable $\frac{R'}{a}-\frac{R'}{b}=\frac{10}{3}$, & il n'y aura pour lors d'autre changement à faire à la construction donnée par Mr. Clairaut p. 631.

que

que de mettre la distance focale R′, au lieu de R, dans la dimension des rayons de la premiere & de la troisieme lentille. Si on laissoit subsister le rayon R, l'aberration de sphéricité ne feroit pas détruite, puisqu'elle ne l'est (hyp.) qu'en prenant $\frac{R'}{a}$ & non $\frac{R}{a}$ pour l'inconnue de l'équation.

5. Il résulte donc de ces différentes remarques, que quelque supposition qu'on fasse sur les erreurs du calcul de Mr. Clairaut, il y en a nécessairement de très grandes dans les dimensions qu'il a données de son objectif. Aussi un habile artiste l'ayant voulu construire, a trouvé, m'a-t-il dit, que bien loin d'être supérieur aux objectifs ordinaires, il déformoit entierement l'objet. Ces erreurs tiennent peut-être uniquement à ce que Mr. Clairaut a mis dans deux de ses équations R pour R′, comme je viens de le remarquer tout à l'heure. Mais on est bien excusable de commettre quelques erreurs dans ces longs calculs.

6. Je passe maintenant à l'aberration de 0′, 18575 que trouve Mr. Beguelin dans le premier de mes objectifs; ainsi qu'à l'aberration de 0′, 1773 qu'il trouve dans le second: & je remarque d'abord, que d'après mes calculs même, le premier de ces objectifs n'est pas absolument exempt de l'aberration de sphéricité, mais seulement en doit avoir une beaucoup moindre que celle d'une lentille bi-convexe isoscele de même foyer, ce qui s'accorde avec les calculs de Mr. Beguelin même, qui donne pour l'aberration de cette lentille 0′, 3037. Il est vrai que l'aberration que je trouve pour mon premier objectif est moindre que ne la trouve Mr. Beguelin, & il est vrai aussi que l'aberration de mon second objectif qu'il trouve de 0′, 1773 devroit être nulle, au moins à très peu près, suivant mes calculs. Cette différence de résultats vient, ce me semble, de ce que dans les calculs de l'aberration je néglige les quantités de l'ordre de $\frac{\omega^4}{R^4}$, ω étant l'ouverture

verture & R' le rayon de la convexité; or, comme il a ici un rayon 0,3255R, qui est moins du tiers de la distance focale R, il s'ensuit que $\frac{\omega}{R'}$ est ici environ $\frac{1}{4}$, au lieu de $\frac{1}{12}$; il pourroit donc très bien se faire que les termes de l'ordre de $\frac{\omega^4}{R'^4}$ qui ont été négligés dans mon calcul, produisissent une aberration sensible.

7. On se confirmera dans cette opinion, si on remarque que l'aberration d'une lentille bi-convexe isoscele est égale (Mém. Acad. des Sciences de Paris de 1764. p. 106.) à $\frac{\omega\omega}{4R} \times \frac{25236}{12400} \times \frac{10^3}{11^3} = \frac{\omega\omega}{4R} \times 1,529$, comme le trouve aussi Mr. Euler, & que si $\omega = \frac{R}{12}$, cette aberration, suivant Mr. Beguelin, differe de $\frac{1}{11}$ de la vraie (Mém. de Berlin Tom. XVIII. p. 376.); cependant on a ici $\frac{\omega}{R} = \frac{1}{12}$, & $\frac{\omega^4}{R^4} = \frac{1}{12^4}$. Ainsi, puisque les termes négligés de l'ordre de $\frac{1}{12^4}$ produisent une erreur de $\frac{1}{11}$, ils pourroient bien en produire une plus grande lorsque $\frac{\omega}{R'}$ n'est qu'environ $\frac{1}{4}$, comme il arrive ici dans une des lentilles.

8. Je ne pense pas au reste, & Mr. Beguelin me paroit avoir quelques doutes bien fondés sur ce sujet, que l'aberration insensible soit aussi petite qu'il le suppose, c'est à dire, de. 0,00375 pouces sur 50 pouces de foyer. En effet 1°. dans les lunettes simples ordinai-

 res

tes l'aberration de réfrangibilité ſeule, indépendamment de toute autre, eſt $\frac{2R}{55}$, ce qui eſt bien plus grand que 0,00375 pouces ſur 50. 2°. dans ces mêmes lunettes, l'aberration de ſphéricité eſt $\frac{\omega\omega}{4R} \times 1,529$ $=$ environ $\frac{3\omega\omega}{8R}$. Or $\frac{\omega\omega}{R}$ $=$ environ $\frac{1}{3}$ de ligne, comme je l'ai fait voir dans le Tome III. de mes Opuſcules art. 537. & ailleurs. Donc l'aberration de ſphéricité des lunettes ſimples eſt égale à $\frac{1}{8}$ de ligne, ou à peu près 0,01 pouce, & par conſéquent beaucoup plus grande que 0,00375 pouces pour 50 pouces de foyer. On remarquera en paſſant que cette aberration eſt conſtante pour toutes les lunettes dioptriques. 3°. Dans les téleſcopes catoptriques l'aberration eſt $\frac{\omega\omega}{32R}$, & on a $\frac{\omega^2}{R\sqrt{R}} = \frac{3}{16}\sqrt{(1 \text{ ligne})}$, parce que dans ces téleſcopes $\frac{\omega^4}{R^3}$ eſt conſtant, & égal, ſuivant les tables, à $\frac{3^4 . 12^4}{2^4 . 12^6}$. Donc, ſi on fait R $=$ Q. 12. 12 lignes, c'eſt à dire, $=$ Q pieds, on aura $\frac{\omega\omega}{32R} = \frac{3 \text{ lig. } 12\sqrt{Q}}{32. 16} = \frac{3 \text{ pouc.} \times \sqrt{Q}}{32. 16} = 0,00585\sqrt{Q}$ pouces; d'où l'on voit que l'aberration dans tous les cas peut être ſuppoſée beaucoup plus grande que de 0,00375 pouces ſur 50 pouces de foyer.

9. Je reviens à l'aberration des téleſcopes, & je remarque que puiſqu'elle eſt égale à $\frac{3 \text{ pouces } \sqrt{Q}}{32. 16}$, ſi on fait la diſtance focale

R $=$

R = Q. 12 pouces, l'aberration sera $\frac{R}{32.16.4\sqrt{Q}} = \frac{R}{2.(32)^2\sqrt{Q}}$ $= \frac{R \times 0,000487}{\sqrt{Q}}$, quantité beaucoup plus grande que $R \times 0,000075$ que trouve Mr. Beguelin; à moins que $\sqrt{Q}$ ne soit = ou > 7, c. à d. à moins que le Télescope n'ait 49 à 50 pieds; longueur qu'on n'a point encore donnée à ces instrumens.

10. Soit α l'aberration calculée d'une lunette achromatique, pour avoir son ouverture ω', & la distance focale ρ' de son oculaire, on nommera ω, & ρ, l'ouverture & la distance focale de l'oculaire dans un télescope de même foyer; & en admettant la regle reçue des Opticiens, on fera $\omega\rho = \omega'\rho'$, & $\frac{\omega^3}{32 R^2} : \rho :: \frac{\omega'\alpha}{R} : \rho'$; d'où l'on tire $\omega'\omega' = \frac{\omega^4}{32 R\alpha} = \frac{\omega^4}{32 R^3} \times \frac{R}{\alpha}$ $= \frac{3^2 \text{ lignes}}{32.\ 16^2} \times \frac{R^2}{\alpha}$. Donc, si $R = Q.\ 12.12$ lignes, & $\alpha =$ p lignes, on aura $\omega'\omega' = \frac{3^2.\ Q^2.\ 12^4 \text{ lignes}}{32.\ 16^2\, p}$; donc $\omega' =$ $\frac{3Q \text{ lignes}}{\sqrt{(2p)}} \times \frac{9}{16}$, l'ouverture ω étant telle que $\frac{\omega^4}{R^3} = \frac{3^2 \text{ lignes}}{16^2}$, ou $\omega^4 = \frac{Q^3.\ 12^6.\ 3^2 \text{ lignes}^4}{16^2}$, ce qui donne $\omega =$ 1 ligne $\times Q^{\frac{3}{4}} \times 9 \times 2$.

11. Dans les lunettes dioptriques, on a $\frac{\omega\omega}{R} = \frac{1}{3}$ de ligne à peu près, & par conséquent $\omega = \frac{12 \text{ lignes} \sqrt{Q}}{\sqrt{3}}$; on a de plus $\rho =$ environ $\frac{11\,\omega}{10}$; & enfin par la théorie des lunettes, l'aberration lati-

latitudinale égale à environ $\frac{\omega}{55}$. Cette aberration, par la théorie des mêmes lunettes, produit dans l'oeil un angle égal à environ $\frac{\omega}{55\varrho}$ $= \frac{10}{55.11}$, c. à d. à près d'un degré. Dans les télescopes l'aberration latitudinale est, comme on sait, $= \frac{\omega^3}{4.32R^2}$; & cette aberration latitudinale, divisée par ϱ, forme au fond de l'oeil l'angle d'aberration, qui est constant, & le plus grand que l'oeil puisse supporter dans ces instrumens; voyons donc quelle est la valeur de cet angle. En supposant R $=$ 1 pied, on a $\omega = 18$ lignes, $\varrho = \frac{12 \text{ lignes}}{5}$ à peu près, donc $\frac{\omega^3}{4.32R^2\varrho} = \frac{5.3}{(16)^2.64}$, ce qui ne donne qu'un angle de 3 à 4 minutes. Ce n'est pas ici le lieu d'examiner pourquoi ces deux angles, qui sembleroient devoir être égaux, ou à peu près égaux, sont si différens, l'un étant 15 à 20 fois plus grand que l'autre. J'en ai, ce me semble, au moins indiqué la raison dans le Tome III de mes *Opuscules* Art. 546. & suiv. en montrant que la théorie de l'aberration, adoptée jusqu'ici, est très imparfaite, surtout par rapport aux télescopes. Mais, quoi qu'il en soit, il paroit au moins qu'on peut se permettre dans les lunettes achromatiques une aberration de sphéricité qui produise dans l'oeil un angle d'environ 3 à 4 minutes.

12. Je ne doute pas même qu'on ne puisse, au moins en plusieurs cas, rendre cet angle beaucoup plus grand sans nuire à la bonté de la lunette. Car on vient de voir qu'il peut aller jusqu'à un degré dans les lunettes dioptriques, en n'ayant égard qu'à la seule aberration de réfrangibilité, beaucoup plus incommode que l'aberration de sphéricité, par les couleurs dont elle défigure l'objet. Quant à l'aberration

tion de ſphéricité de ces mêmes lunettes, elle eſt $\frac{\omega\omega}{4R} \times \frac{3}{2}$, & l'aberration latitudinale qui en réſulte $\frac{\omega^3}{4.4R^2} \times \frac{3}{2}$; d'où réſulte l'angle $\frac{\omega^3 \times 3}{2.4.4R^2\varrho} = \frac{3.10.\omega^2}{2.4.4.11R^2}$ (à cauſe de $\frac{\omega^2}{R} = \frac{1}{3}$ lignes, de $\varrho = \frac{11\omega}{10}$, & de $R = Q.12.12$ lign.) $= \frac{5}{4.4.11.12.12Q}$. Or il eſt évident que cette quantité eſt beaucoup plus petite que $\frac{5.3}{(16)^2 64}$, puiſque Q eſt ſuppoſé plus grand que 1. Elle pourroit donc être plus grande (abſtraction faite de l'aberration de réfrangibilité) ſans nuire à la bonté de la lunette; ce qui confirme ce que j'ai dit ailleurs (Mém. Acad. de Paris 1767. p. 76.) que les lunettes achromatiques peuvent, à égale ouverture, ſouffrir une aberration de ſphéricité beaucoup plus grande que celle des lunettes ordinaires; ce qui permet de leur donner une ouverture plus grande, comme on la leur donne en effet.

13. Il réſulte, ce me ſemble, de ces calculs & de ces réflexions, que l'aberration inſenſible peut être ſuppoſée, ſans aucun riſque, beaucoup plus grande que ne la donne Mr. Beguelin; ce qui paroit d'ailleurs confirmé par les excellentes lunettes achromatiques qu'ont exécutées Mrs. Antheaulme & de Leſtang, & qui, de l'aveu de Mr. Beguelin même, ont une aberration beaucoup plus forte que celle qu'il donne pour la limite de l'aberration inſenſible. D'ailleurs, ſi on peut & ſi on doit même donner aux lunettes achromatiques une ouverture beaucoup plus grande que celle des lunettes dioptriques de même foyer, il ne paroît pas néceſſaire d'étendre cette ouverture juſqu'au douzieme de la diſtance focale; car dans les lunettes dioptriques ordi-

ordinaires, $\frac{\omega\omega}{R}$ étant $= \frac{1}{3}$ ligne, l'ouverture eſt $\omega = \frac{12 \text{ lign.} \sqrt{Q}}{\sqrt{3}}$ $= \frac{R}{12\sqrt{(3Q)}}$, c. à d. beaucoup moindre que $\frac{R}{12}$; & dans les téleſcopes mêmes qui ſupportent une ouverture bien plus grande, l'ouverture eſt (Art. 10.) $12 \text{ lign.} \times \frac{1}{2} \times Q^{\frac{3}{4}} = \frac{R}{12} \times \frac{3}{2\sqrt[4]{Q}}$, quantité encore plus petite que $\frac{R}{12}$, ſi Q eſt $=$ ou $> \frac{81}{16}$. Auſſi la lunette de 7 pieds de Mr. Antheaulme ne porte-t-elle qu'environ 34 lignes d'ouverture, & une autre lunette de 12 pieds qu'il a conſtruite depuis, environ 3 pouces. Les lunettes de Mr. de Leſtang, à deux verres comme celles de Mr. Antheaulme, portent 26 à 27 lignes pour 5 pieds, 22 lignes pour 4 pieds, 20 lignes pour 3 pieds, & 17 lignes pour 27 pouces. S'il y a des lunettes à 3 verres qui portent un douzieme de la diſtance focale d'ouverture, c'eſt que les ſurfaces des lentilles n'y étant pas contiguës, on peut, au moyen des ſix inconnues que le probleme renferme alors, rendre l'aberration plus exactement nulle que dans un objectif à 3 lentilles contiguës. C'eſt de quoi je pourrai vous entretenir dans une autre occaſion, ainſi que de pluſieurs autres réflexions ſur ces lunettes.

EXTRAIT

EXTRAIT D'UNE AUTRE LETTRE DE M. D'ALEMBERT À M. DE LA GRANGE. (*)

1.

Je continuerai, Monsieur, à vous faire part dans cette lettre des Remarques que l'excellent Mémoire de Mr. Beguelin m'a occasionnées; je pourrois peut-être y mettre un peu plus d'ordre; mais, comme je les crois utiles, je vous les communiquerai du moins dans celui où elles se sont présentées à mon esprit.

2. Je ne crois pas, (ce qui au fond ne nuit en rien aux excellentes recherches de Mr. Beguelin,) que quand on aura trouvé l'aberration d'une lunette achromatique, il faille, pour en déterminer l'ouverture, comparer cette aberration à celle d'une lunette dioptrique ordinaire; parce que les ouvertures des lunettes dioptriques ordinaires sont réglées sur l'aberration de réfrangibilité, & non sur celle de sphéricité qui y est beaucoup plus petite, & à laquelle même on n'a aucun égard pour déterminer ces ouvertures. Ainsi l'ouverture qu'on donne à une lunette dioptrique ordinaire ne doit point servir de comparaison à celle qu'on doit donner à une lunette achromatique dont l'aberration est connue. Cela est d'autant plus vrai que, comme je l'ai fait voir ailleurs, les ouvertures & les oculaires des lunettes dioptriques, comparées aux ouvertures & aux oculaires des télescopes catoptriques, ne sont pas dans la proportion que sembleroient exiger les théories jusqu'à présent admises par les Opticiens. V. le Vol. III. de mes Opusc. Art. 546. & suiv. Ce défaut

(*) Du 30 Nov. 1769.

défaut de proportion se fait sentir encore en plusieurs autres points; par exemple, une lunette de 3 pieds qui grossit 35 fois, & un télescope de 6 pouces qui grossit à peu près autant, devroient avoir la même ouverture, suivant la regle reçue, puisque les ouvertures doivent être, suivant cette regle, proportionelles aux augmentations; cependant la lunette a plus d'ouverture que le télescope; & cette différence est encore plus sensible dans une lunette de 9 pieds comparée à un télescope d'un pied, qui grossit à peu près autant, c. à d. environ 60 fois; car l'ouverture de la lunette est à celle du télescope à peu près comme 16 à 14; il semble pourtant que le télescope devroit, toutes choses égales, avoir plus d'ouverture que la lunette, par la raison qu'il absorbe un plus grand nombre de rayons.

3. Dans l'Art. 547. du 3e. Vol. de mes Opuscules, j'ai supposé, comme il résulte en général de la théorie que j'avois donnée plus haut, qu'à égales distances focales, les oculaires d'une lunette & d'un télescope devoient être en raison des aberrations longitudinales; & cette proportion m'avoit donné les ouvertures des télescopes plus petites qu'on ne les fait, en raison de 3 à 4 (Art. 557. du même ouvrage). En examinant la chose sous un autre point de vue, si on suppose le foyer de l'oculaire placé au milieu de l'aberration longitudinale de la lunette, & au quart de l'aberration longitudinale du télescope, suivant les théories ordinaires, on trouveroit au lieu de l'équation $\frac{\omega'^4}{32 R^2} = \frac{\omega^2}{50}$ de l'Art. cité, l'équation $\frac{\omega'^4}{4 \cdot 32 R^2} = \frac{\omega^2}{50}$, qui donne $\omega' = 2 \sqrt{\left(\frac{2 R \omega}{5}\right)}$ (au lieu de $\omega' = 2 \sqrt{\left(\frac{R \omega}{5}\right)}$) $= \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{(Q . 12 . 12 . 12 \sqrt{Q})}}{\sqrt{5} . \sqrt[4]{3}} = \frac{2^{\frac{3}{2}} . 12 . \sqrt{(12)} . Q^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{5} . \sqrt[4]{3}}$, en prenant une ligne pour l'unité. Or, l'ouverture réelle ω' des télescopes étant

$Q^{\frac{3}{4}} \times 9 \times 2$, on voit que l'ouverture trouvée par le nouveau calcul est à l'ouverture réelle en raison de $\frac{2\sqrt{2}.4}{\sqrt{5}.\sqrt[4]{3}}$ à $\sqrt{3}$, ou de 8 à $\sqrt{\frac{5}{2}} \times \sqrt[4]{27}$, & par conséquent beaucoup plus grande. Tout cela prouve, comme je l'ai déjà fait voir dans l'Ouvrage cité, que l'aberration étant donnée, il ne faut pas s'en tenir aux regles adoptées jusqu'ici, pour déterminer l'ouverture & l'oculaire.

4. Si une lunette étoit absolument exempte de l'aberration de réfrangibilité, & qu'elle eût une aberration de sphéricité égale à celle des lunettes dioptriques ordinaires laquelle est, comme on sait, à peu près $\frac{\omega\omega}{4R} \times \frac{3}{8}$, on auroit, suivant la régle reçue $\frac{3\omega'^4}{2} = \frac{\omega^4}{32}$, à égale distance focale R pour la lunette & pour le télescope, ce qui donneroit $\omega' = \frac{\omega}{2\sqrt[4]{3}}$, & par conséquent l'ouverture de la lunette moindre que celle du télescope, en raison de 1 à $2\sqrt[4]{3}$. Or ω est $= Q^{\frac{3}{4}} \times 9 \times 2$; donc $\omega' = 9\sqrt[4]{\frac{Q^3}{3}}$; & cette quantité est à l'ouverture $\frac{12\sqrt{Q}}{\sqrt{3}}$ d'une lunette ordinaire comme $3\sqrt[4]{(3Q)}$ est à 4; elle seroit donc plus grande ou plus petite, selon que Q sera $>$ ou $<$ que $\frac{25b}{243}$. Ainsi, en admettant toujours la régle reçue, l'ouverture d'une lunette achromatique telle qu'on la suppose, seroit constamment plus petite que celle d'un télescope de même foyer; & elle sera

plus

plus grande que celle d'une lunette ordinaire de même foyer, si ces lunettes ont un peu plus d'un pied.

5. L'aberration $\frac{\omega\omega\omega}{32R}$ d'un télescope est égale (à cause de $\omega = \frac{R}{8\sqrt[4]{Q}}$) à $\frac{R}{2(32)^2\sqrt{Q}}$ ou $\frac{R}{2048\sqrt{Q}}$; d'où l'on voit qu'elle est en général beaucoup plus petite que les aberrations 0,00029 R & 0,000505 R des lunettes de Mrs. Antheaulme & de Lestang, telles au moins que Mr. Beguelin les trouve. En général, soit $\alpha R'$ l'aberration d'une lunette achromatique, R' étant la distance focale de l'objectif, ρ' celle de son oculaire; si on suppose avec Mr. Beguelin l'ouverture égale à $\frac{R'}{12}$, on aura en comparant cette lunette à un télescope, suivant la regle reçue, $\frac{\alpha R'}{\rho'} \times \frac{1}{12} = \frac{\omega^3}{32R^2\rho}$; & comme $\frac{R'}{\rho'}$ doit être $= \frac{R}{\rho}$ pour que la lunette fasse le même effet que le télescope, on aura $\frac{\alpha}{12} = \frac{\omega^3}{32R^3} = \frac{1}{32.8^3.Q^{\frac{3}{4}}}$; d'où l'on tire $Q^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{8^4\alpha} = \frac{3}{4096\alpha}$, ou à très peu près $\frac{3}{5000\alpha}$; donc si $\alpha = \frac{3}{10000}$ ou $\frac{5}{10000}$, comme dans les lunettes de Mrs. Antheaulme & de Lestang, on aura $Q^{\frac{3}{4}} = 2$ ou $\frac{6}{5}$; par conséquent la lunette de Mr. Antheaulme, par exemple, devroit faire l'effet d'un télescope de plus de 2 pieds, ou d'une lunette de plus de 25, & c'est ce qui a lieu en effet; car cette lunette fait l'effet d'un télescope d'en-

d'environ 2 pieds & demi, ou d'une lunette de 35 pieds, ce qui s'accorde assez bien avec le résultat précédent, puisque $Q = 2^{\frac{4}{3}} =$ environ $2 + \frac{1}{2}$.

6. Mais, si on comparoit les lunettes achromatiques avec les lunettes ordinaires, on auroit l'équation $\frac{\alpha R'}{12 \varrho'} = \frac{2 \omega}{55 \varrho} = \frac{2 \omega R}{55 R \varrho}$; ce qui donneroit $\alpha = \frac{24 \omega}{55 R} =$ (à cause de $\omega = \frac{R}{12 \sqrt{(3Q)}}$) $\frac{2}{55 \sqrt{(3Q)}}$; donc $\sqrt{(3Q)} = \frac{2}{55 . \alpha}$: en sorte que dans la lunette de Mr. Antheaulme, par exemple, on a $\sqrt{(3Q)} = \frac{20000}{165} =$ à peu près 125, ce qui donneroit pour Q une valeur énorme; nouvelle preuve qu'il ne faut point comparer l'aberration des lunettes achromatiques à celle des lunettes ordinaires, puisqu'il en résulteroit une longueur énorme dans les lunettes ordinaires équivalentes aux lunettes achromatiques, en supposant l'ouverture de ces dernieres lunettes égale à $\frac{1}{12}$ de la distance focale.

7. En général, soit ω' l'ouverture de la lunette achromatique, on auroit en la comparant avec une lunette ordinaire $\frac{\omega' . \alpha R'}{R' \varrho'} = \frac{2 \omega}{55 \varrho}$, ou $\frac{\alpha \omega'}{R'} = \frac{2}{55 . 12 \sqrt{(3Q)}}$. Donc, si $\frac{\omega'}{R'} = \frac{36 \text{ lignes}}{7 \text{ pieds}} = \frac{1}{28}$, comme dans la lunette de Mr. Antheaulme, & $\alpha = \frac{3}{10000}$, on aura $\sqrt{(3Q)} = \frac{28}{55 . 6} \times \frac{10000}{3}$, ce qui donneroit encore pour Q

une

une très grande valeur; & si on compare la même lunette avec un télescope, on aura $\frac{\omega' \alpha}{R'} = \frac{\omega^3}{32 R^3}$ ou $\frac{3}{10000} \times \frac{1}{28} = \frac{1}{32 . 8^3 Q^{\frac{3}{4}}}$;

d'où l'on tire $Q^{\frac{3}{4}} = \frac{70000}{3 . 4096}$ = à peu près $\frac{70}{3 . 5}$ ou plus de 4 pieds. Ainsi cette lunette devroit, en suivant la regle reçue, & avec l'ouverture que lui a donnée Mr. Antheaulme, équivaloir à un télescope de plus de 4 pieds, au lieu qu'elle n'équivaut réellement qu'à un télescope de 2 pieds & demi. C'est ce qu'on peut encore voir autrement, en considérant que dans les télescopes l'angle d'aberration au fond

de l'oeil est environ $\frac{5 . 3}{(16)^2 . 64}$, comme je l'ai observé dans ma lettre précédente, & que, si on fait, comme dans ma lettre précédente, $\frac{\alpha R}{4 \rho} \times \frac{\omega'}{R} = \frac{5 . 3}{(16)^2 . 64}$, on aura dans la lunette de Mr. Antheaulme

$\frac{3}{10000} \times \frac{R}{\rho} \times \frac{1}{28} = \frac{5 . 3}{(16)^3}$; & $\frac{R}{\rho} = \frac{280000 \times 5}{(16)^3}$ ou environ

85 fois, ce qui est bien au dessous de la valeur réelle, puisque cette lunette étant équivalente à une lunette de 35 pieds, doit grossir environ 120 fois. Vous voyez donc, Monsieur, par toutes ces combinaisons, que les proportions admises par les Opticiens entre les ouvertures, les aberrations & les oculaires, n'ont point lieu dans la comparaison des lunettes achromatiques aux lunettes ordinaires, ni même aux télescopes; je remarquerai encore que, si on fait l'ouverture d'une

lunette achromatique égale à $\frac{R'}{12}$ ou en général à $\alpha R'$, α étant constant, l'oculaire devra toujours être le même, au moins en admettant la regle qui donne l'ouverture proportionelle à l'augmentation; car

en

en faisant ω' proportionelle à $\frac{R'}{\rho'}$, & $\frac{\omega'}{R'}$ constant, ρ' sera aussi constant, & l'augmentation sera en raison de R.

8. Je viens maintenant à de nouvelles réflexions, propres à confirmer celles que j'ai déjà faites dans ma lettre précédente, sur l'obligation où l'on peut être d'avoir égard aux quatriemes puissances de l'ouverture dans le calcul de l'aberration. On sait, & j'ai déjà observé que l'aberration d'une lentille isoscele biconvexe est $\frac{x^2 \times 1,529}{R}$, en n'ayant égard qu'à la seconde puissance. Soit $\frac{x^2 \times 1,529}{R} + \frac{Ax^4}{R^3}$ l'aberration de cette lentille, en ayant égard à la quatrieme puissance de l'ouverture x; & Mr. Beguelin ayant trouvé par ses calculs que cette aberration est 0,00291 R, en prenant $x = \frac{1}{24}$; & que $\frac{x^2 \times 1,529}{R} = 0,0026545\,R$; on aura donc $\frac{A.\,R}{(24)^4} = (0,00291 - 0,00265)R$; d'où l'on tire $A = (24)^4 \times \frac{26}{100000} = \frac{4.4.144.144.26}{100000} = \frac{144.144.13}{5.25.25}$, nombre assez considérable, & qui le deviendra encore bien davantage, si en laissant l'ouverture la même, on diminue la distance focale en raison de 3 à 10, comme il arrive dans un des rayons de mon objectif à trois lentilles; car il faudra multiplier l'expression précédente par $\frac{(10)^4}{3^4}$; ce qui changera la valeur de A en $(144)^2 \times 13 \times \frac{100 \times 4^2}{5.81}$ = à peu près

(144)²

$(144)^2 \times 13 \times 4$. Dans ce cas le terme $\frac{Ax^4}{R^3}$ deviendra $\frac{26R}{100000} \times \frac{(10)^4}{3^4} = \frac{26R}{810}$, & le terme 0,00265 R deviendra $\frac{0,00265 R \times 100}{3^2} = \frac{0,265 R}{9}$, & ces deux termes $\frac{26R}{810}$, & $\frac{265 R}{9000}$ seront entr'eux comme 2600 à 2385; d'où l'on voit que le terme $\frac{Ax^4}{R^3}$ seroit > que le terme $\frac{1,529xx}{R}$; & que, par conséquent, on ne devroit pas se contenter d'avoir égard au premier terme dans le calcul de l'aberration (*).

9. Examinons maintenant le troisieme objectif exécuté par Mr. de Lestang, & dont Mr. Beguelin (p. 415.) trouve l'aberration 0,003916R. D'après les calculs de Mr. Clairaut (p. 628. des Mém. de Paris 1762.) l'aberration seroit $\frac{0,6815xx}{R}$; donc, en supposant $\frac{A'x^4}{R^3}$ pour le second terme de l'expression de l'aberration, on auroit dans le cas présent $\frac{1}{(24)^2} \times 0,6815 + \frac{A'}{(24)^4} = 0,003916$; donc $A = \frac{(24)^4 \times 3916}{1000000} - \frac{24^2 \times 6815}{10000} = (24)^2 \times \frac{1572116}{1000000}$ = à peu près $\frac{4.144 \times 16}{10}$, ce qui est encore un nombre considérable. On peut remarquer aussi que l'aberration 0, 003916 R trouvée par Mr.

(*) Dans ce calcul & dans celui de l'Art. suiv. j'ai fait abstraction de l'épaisseur du verre, parce que Mr. Beguelin en fait de même abstraction dans le sien.

Mr. Beguelin pour l'objectif dont il s'agit est plus grande que l'aberration 0, 00291 R, qu'il assigne pour une lentille biconvexe isoscele; au lieu que la formule $\frac{0,006815 x^2}{R}$ de Mr. Clairaut ne donne cette aberration qu'égale à moins de la moitié de celle d'un objectif simple isoscele & biconvexe.

10. Enfin le second objectif (p. 413.) exécuté aussi par Mr. de Lestang a pour aberration 0,000505 R; de maniere que si on suppose nul avec Mr. Clairaut le terme qui doit contenir le quarré de x dans l'expression de l'aberration de cet objectif, on aura $\frac{A}{(24)^4} =$ 0,000505, ou A = à très peu près $\frac{4 \cdot 4 \cdot (144)^2}{2000}$, nombre qui est encore très considérable; & dans la lunette de Mr. Antheaulme, dont Mr. Beguelin trouve l'aberration 0,00029 F, on auroit par la même raison $\frac{A}{(24)^4} = 0,00029$, ou A = à très peu près $\frac{4 \cdot 4 \cdot (144)^2 \times 3}{10000}$.

11. Toutes ces remarques prouvent, ce me semble, que si on fait l'ouverture = à un douzieme de la distance focale, il faudra, au moins souvent, avoir égard dans le calcul de l'aberration, aux termes qui contiennent la quatrieme puissance de x. D'ailleurs, quoique nous ayons supposé nul, dans le calcul de l'aberration des objectifs achromatiques, le terme qui contient le quarré de x, il y a cependant beaucoup d'apparence que ce terme n'est pas tout à fait nul, & qu'il peut même contenir une partie sensible de l'aberration; car comme les valeurs des rayons ne sont déterminées qu'à peu près, & que le quarré & même le cube de la quantité $\lambda = 0, 15$ R, se trouvent au dénominateur des termes qui expriment l'aberration, il s'ensuit que si la valeur des rayons n'est pas exactement & rigoureusement telle que le terme

terme qui contient xx soit absolument nul, il pourra résulter de cette erreur une aberration sensible. On voit en effet par nos calculs que l'aberration qui est nulle, ou qui doit l'être, dans le premier des objectifs des Mém. de Paris de 1764. p. 101, devient déjà sensible dans l'objectif de la p. 132, quoiqu'il ne soit pas fort différent de l'autre. Pour avoir une aberration qui soit ou absolument ou sensiblement nulle, au moins dans le terme qui contient xx, il seroit peut-être nécessaire de faire à la rigueur les calculs qui n'ont été faits qu'au moyen des décimales; calculs dans lesquels il se peut faire que les quantités négligées produisent par leur accumulation un effet sensible sur le dernier résultat. Je crois cependant qu'en attendant ce calcul rigoureux, les objectifs dont j'ai donné les dimensions pourront produire un bon effet, 1°. parce que l'aberration de sphéricité s'y trouve beaucoup moindre que dans une lentille biconvexe isoscele. 2°. parce qu'en prenant le diametre de l'ouverture moindre qu'un douzieme de R, par exemple $= \frac{1}{24}$ ou $\frac{1}{18}$ de R, l'aberration s'y trouvera beaucoup moindre encore. 3°. Enfin parce que l'essentiel dans ces sortes de lunettes est de bien détruire l'aberration de réfrangibilité, & que l'aberration de sphéricité pourroit même être plus grande que celle d'une lunette ordinaire, sans porter un grand préjudice à la bonté de la lunette achromatique. (Mém. de Paris 1767. p. 76.)

12. Je dois remarquer encore que, si on a égard à l'épaisseur des lentilles, que Mr. Beguelin a négligée dans ses calculs, l'angle qu'il appelle ϕ'' deviendra plus petit, & par conséquent aussi l'angle $\phi'' - A$, puisque l'angle A est constant. Prenons pour premier exemple une lentille biconvexe isoscele, & remarquons, en conservant les noms donnés par Mr. Beguelin, que si on nomme e l'épaisseur de cette lentille, on aura $\frac{1}{F} = \frac{2(m-1)}{r} + me\left(\frac{m-1}{mr}\right)^2$, & non pas simplement $\frac{1}{F} = \frac{2(m-1)}{r}$, comme on le trouve en négli-

négligeant l'épaisseur. Or, en appellant x le demi-diametre de l'ouverture, on aura $\varepsilon = \frac{x^2}{r} = \frac{F^2}{(24)^2 r} = \frac{F}{2.24^2(m-1)}$;

donc $\frac{1}{F} = \frac{2(m-1)}{r} + \frac{m}{F \times 2.24^2(m-1)} \times \frac{(m-1)^2}{m^2} \times \frac{1}{4(m-1)^2}$

$= \frac{2(m-1)}{r} + \frac{1}{8.24^2 m(m-1)F}$; d'où il est aisé de voir que

$r = \frac{2(m-1)F}{1 - \frac{1}{8(24)^2 m(m-1)}} > 2(m-1)F$. Le rayon r

est donc plus grand, tout le reste d'ailleurs égal, en ayant égard à l'épaisseur de la lentille, & par conséquent les angles c, & c' plus petits, le diametre $2x$ de l'ouverture demeurant toujours le même, c. à d. $\frac{F}{12}$. Or puisqu'on a, aux quantités du 3e ordre, près $\phi'' = (m-1)2c$, il est aisé de voir que c étant supposé diminué à peu près en raison de $1 + \frac{1}{8(24)^2 m(m-1)}$ à 1, & l'angle ϕ'' étant à peu près de 2°, 23′ ou 143′, il faudra diminuer cet angle d'environ $\frac{143'}{8(24)^2(m-1)m}$, c. à d. à cause de $m = \frac{3}{2}$ à peu près, d'environ $\frac{1'}{24} = 0{,}0416'$. Donc, dans les lentilles simples biconvexes isosceles, l'angle d'aberration 0′, 3037 trouvé par Mr. Beguelin doit être diminué de 0′,0416.

13. En général, il eſt clair que dans l'expreſſion de $\frac{1}{R}$, (R étant la diſtance focale d'une lentille quelconque,) les épaiſſeurs des verres, & leurs diſtances ſe trouvent toutes affectées de ſignes poſitifs & de quantités élevées au quarré (v. Mém. de Paris 1764.), d'où il eſt clair que la valeur de l'angle ϕ'' ſera diminuée. En effet, puiſqu'on a $\frac{1}{R} = (P - 1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) + (P' - 1)\left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'''}\right)$ &c. plus une quantité poſitive très petite dépendante de la diſtance & de l'épaiſſeur des verres, & qu'on peut ſuppoſer $= \frac{\alpha}{R}$, α étant une quantité poſitive, il eſt clair que ſi on a pris les rayons r, r', r'', r''' &c. égaux à νR, $\nu' R$, $\nu'' R$ &c. pour ſatisfaire à l'équation $\frac{1}{R} = (P - 1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$ &c. en négligeant les épaiſſeurs & les diſtances des verres, il faudra prendre r, r', &c. égaux à $\nu(1 + \alpha)R$, $\nu'(1 + \alpha)R$ &c. pour ſatisfaire à la même équation augmentée du terme $+ \frac{\alpha}{R}$; d'où il eſt aiſé de conclure que l'angle ϕ'' ſera diminué à peu près en raiſon de $1 - \alpha$ à 1.

14. Donc, ſi l'angle ϕ'' eſt $> A$, comme il arrive dans nos deux objectifs examinés par Mr. Beguelin, l'angle d'aberration ſera diminué dans nos deux objectifs d'une quantité à peu près $= \alpha \times 143'$, α étant une fraction poſitive qui dépend des épaiſſeurs & des diſtances des verres, & des quantités poſitives qui les affectent dans l'expreſſion de $\frac{1}{R}$. Mais, ſi l'angle ϕ'' étoit $< A$, comme il arrive dans la lunette de Mr. Antheaulme, alors l'aberration ſeroit plus grande

grande qu'en négligeant l'épaisseur & la distance des verres. Il me paroit donc résulter de toutes ces remarques, que l'aberration de sphéricité ne doit pas produire un effet nuisible à la bonté de mes deux objectifs; & qu'ainsi ils pourront être mis en œuvre avec succès, au moins si on suppose les valeurs de P, P′ & $\frac{dP'}{dP}$ telles que je les ai supposées.

15. Voici encore quelques observations sur le calcul de l'angle ϕ'', qui pourront n'être pas sans utilité. D'abord il est évident que si on nomme ϕ, ϕ', ϕ'' les angles du rayon avec l'axe, on aura les équations $\sin(c - \phi) = P\sin(c - \phi')$, & $\sin(c' - \phi') = \frac{1}{P}\sin(c' - \phi'')$; nous supposons ici que les lentilles sont des ménisques, où les rayons r, r' sont positifs. Faisant donc $\phi = 0$, $c - \phi' = k$, on aura, (en mettant pour les sinus leurs valeurs approchées en angles,) $c - \frac{c^3}{2.3} = P\left(k - \frac{k^3}{2.3}\right)$; & supposant de même $c' - \phi' = k'$, $c' - \phi'' = k''$, on aura $k' - \frac{k'^3}{2.3} = \frac{1}{P}\left(k'' - \frac{k''^3}{2.3}\right)$. Donc, 1°. $k = \frac{c}{P} - \frac{c^3}{2.3P} + \frac{c^3}{P^3.2.3}$; 2°. $\phi' = c - k = c - \frac{c}{P} + \frac{c^3}{2.3P} - \frac{c^3}{2.3P^3}$; 3°. k' ou $c' - \phi' = c' - c + \frac{c}{P} - \frac{c^3}{2.3P} + \frac{c^3}{2.3P^3}$; 4°. $k'' = Pk' - \frac{Pk'^3}{2.3} + \frac{P^3k'^3}{2.3} = P(c' - c) + c - \frac{c^3}{2.3} + \frac{c^3}{2.3P^2} + \left(\frac{P^3 - P}{2.3}\right) \times \left(c' - c + \frac{c}{P}\right)^3$;

 5°.

5°. Enfin ϕ'' ou $c' - k'' = (P - 1)(c - c') + \left(1 - \frac{1}{P^2}\right)\frac{c^3}{2.3} + \left(\frac{P - P^3}{2.3}\right)\left(c' - c + \frac{c}{P}\right)^3$. Telle est la valeur de l'angle ϕ'' pour une seule lentille, lorsque $\phi = 0$; & si ϕ n'est pas $= 0$, il n'y a qu'à mettre dans la valeur de k, $c - \phi$ au lieu de c; & achever le reste du calcul comme ci-dessus. On voit aisément comment on peut étendre cette formule à un plus grand nombre de lentilles.

16. On voit d'abord par cette formule que, ni l'équation $\phi'' = (P - 1).(c - c')$, ni l'équation fin. $\phi'' = (P - 1)$ (fin c — fin c') ne sont suffisamment exactes pour déterminer l'angle ϕ'', puisqu'on négligeroit dans l'une & l'autre de ces équations des quantités de l'ordre de c^3, auxquelles il est absolument nécessaire d'avoir égard pour déterminer l'angle ϕ'' avec quelque précision; en sorte que l'équation qui détermine l'angle ϕ'' par l'expression $(m - 1)(c + c') - (n - 1)(k + k')$ dans les calculs de Mr. Beguelin, ne donne qu'une valeur très peu exacte de cet angle, & qu'il faut nécessairement, comme il l'a fait, avoir recours à un calcul plus rigoureux pour connoître l'aberration avec quelque exactitude.

17. Il en est de même de la formule fin. $\phi'' = (m - 1)$ (fin. c + fin. c') &c. qui donneroit $\phi'' = (m - 1)\left(c + c' - \frac{c^3}{2.3} - \frac{c'^3}{2.3}\right) + \frac{(m - 1)^3 (c + c')^3}{2.3}$, formule qui differe beaucoup de la valeur de ϕ'' trouvée Art. 15. & dans laquelle P est la même chose que m; il est visible que l'erreur seroit de l'ordre de c^3 & de c'^3, comme dans l'Art. précédent. Les calculs fondés sur cette équation seroient donc encore très fautifs.

18. Je remarquerai de plus, que si on s'en tenoit à l'équation fin. $\phi'' = (m - 1)$ (fin. c + fin. c' + &c.) pour détermi-

ner l'angle Φ'', la différence entre les angles Φ'' & A seroit toujours la même. En effet, puisque sin. $c = \frac{x}{r}$, sin $c' = \frac{x}{r'}$ &c. on aura sin. $\Phi'' = x(m - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \text{ \&c.}\right) = \frac{x}{R} = \frac{1}{24}$;

or sin. A $= \frac{x}{\sqrt{\left(RR + \frac{R^2}{(24)^2}\right)}} = \frac{1}{24\sqrt{\left(1 + \frac{1}{(24)^2}\right)}}$;

d'où l'on voit que l'angle Φ'' est constant ainsi que l'angle A; 2°. que $\frac{1}{24}$ étant $= 0,0416666$, & les sinus de 2°. 23' & de 2°. 24' étant 0, 0415850 & 0, 0418757, le sinus dont la valeur est 0, 0416666 répond à peu près à 2°. 23', 2807. Or l'angle A étant 2°. 23', 1571, il s'ensuit que la valeur de Φ'' — A seroit égale à la quantité constante 0', 1236, ce qui est bien éloigné d'être vrai. La valeur de Φ'' tirée de l'équation $\Phi'' = (m - 1)(c + c' \text{ \&c.})$ donneroit à la vérité une valeur variable de Φ'' — A, comme elle le doit être, mais cette valeur n'en feroit pas plus exacte. Aussi voit-on combien le calcul exact de l'angle Φ'' — A donne à Mr. Beguelin des résultats différens de ceux qu'il a tirés des autres formules, qui me paroissent absolument illusoires dans le calcul de l'aberration.

19. Je finirai, Monsieur, cette lettre déjà très longue par quelques réflexions. Je ne suis pas aussi frappé que Mr. Beguelin des raisons qui lui font préférer la méthode de tâtonnement dont il se sert, à la méthode analytique, pour anéantir l'aberration dans les lunettes achromatiques; 1°. parce que la méthode analytique donne par elle-même aussi-bien, & plus exactement que l'autre, des valeurs arithmétiques des rayons des surfaces, exprimées en parties de la distance focale; valeurs que les artistes pourront employer aisément sans être obligés de suivre & d'entendre la théorie. 2°. parce que, si les rayons sont trop courts ou trop grands, on peut encore faire usage de la méthode ana-

analytique, en supposant l'aberration, non pas absolument nulle, mais égale à une aberration moindre que celle d'une lunette ordinaire, & que dans le cas où la méthode analytique ne pourroit, avec cette restriction, donner des résultats satisfaisans, la méthode de tâtonnement n'en donneroit pas davantage. Il est vrai que non seulement les calculs analytiques doivent être exacts, mais qu'il faudra peut-être mettre plus de rigueur qu'on n'a fait dans les calculs arithmétiques; pour lors le résultat ne peut manquer d'être préférable à celui que donneroit la méthode de tâtonnement. Enfin on suppose sans doute que les valeurs de P, P', $\frac{dP'}{dP}$ soient exactement connues; mais cette supposition n'est pas moins nécessaire dans la méthode de tâtonnement que dans la méthode analytique.

20. Le seul avantage que la méthode de tâtonnement paroisse avoir, ne peut venir que des quantités de l'ordre de x^4, négligées jusqu'ici dans les calculs analytiques de l'aberration. Mais, en premier lieu, on peut avoir égard à ces quantités, comme je le dirai dans un moment. En second lieu, si les courbures des surfaces sont assez grandes, pour qu'on doive avoir égard dans l'aberration, aux quantités de l'ordre de x^4, il faudra par la même raison avoir égard aux quantités de l'ordre de x^5 dans la valeur de ϕ''; car une erreur de l'ordre de x^5 dans cet angle en produit une de l'ordre de x^4 dans l'aberration focale. Or, si dans la valeur de ϕ'' on est obligé d'avoir égard non seulement aux quantités de l'ordre de x^3, mais encore à celles de l'ordre de x^5, pour rendre l'angle ϕ'' — A sensiblement égal à zéro, il est aisé de voir que la quantité qu'on doit rendre nulle renfermant deux termes dont l'un a pour coëfficient x^3, & l'autre x^5, la méthode de tâtonnement dont on se sert ne rendra l'aberration nulle que pour une seule valeur de x, par exemple $x = \frac{R}{24}$ si l'on veut, & nullement pour une autre valeur, par exemple, pour $x =$

$x = \frac{R}{30}$; en forte que l'aberration qui eſt nulle dans l'axe, & à l'extrémité de l'ouverture de la lunette, paroit être non ſeulement ſenſible, mais même conſidérable, dans les autres points. D'ailleurs la néceſſité d'avoir égard aux termes de l'ordre de x^5, obligeroit par la même raiſon d'avoir égard aux termes qui renferment ε^2, εx^2, ε étant l'épaiſſeur du verre, parce que ε eſt tout au plus cenſé de l'ordre de x^2. Il ne ſeroit donc plus permis alors de négliger l'épaiſſeur & la diſtance des verres, comme on les néglige, & je crois ſans beaucoup de riſque, dans la méthode adoptée par Mr. Beguelin.

21. Je crois en effet qu'on peut toujours en général s'en tenir dans le calcul de l'aberration aux termes affectés par x^2, & ſe contenter de faire ces termes égaux à zéro; 1°. parce qu'en faiſant très exactement, & s'il eſt néceſſaire, en toute rigueur, les calculs arithmétiques indiqués par les formules, la partie de l'aberration qui eſt proportionelle à x^2 ſera ou abſolument nulle, ou tout à fait inſenſible. 2°. parce que la partie qui ſeroit proportionelle à x^4 ne doit pas vraiſemblablement donner une aberration conſidérable, ſurtout ſi on ne fait pas x trop grande, & que les rayons des ſurfaces ne ſoient pas fort petits; & que quand même cette aberration de ſphéricité ſeroit égale à celle d'une lunette ordinaire ou d'un téleſcope, il n'en réſulteroit pas un grand inconvénient pour la bonté de l'objectif achromatique, comme il s'enſuit de tout ce que j'ai dit ci-deſſus; il ſuffit pour s'en convaincre de ſe rappeller que l'aberration d'une lunette ordinaire eſt environ $\frac{R}{12.12.12Q} = \frac{R}{1728Q}$, & celle d'un téleſcope $\frac{R}{2048\sqrt{Q}}$; & que les lunettes achromatiques les meilleures qu'on ait conſtruites juſqu'à préſent ſont très inférieures pour l'effet à des téleſcopes de même longueur: ce qui prouve qu'il reſte encore dans ces lunettes beaucoup plus d'aberration que dans les téleſcopes. Auſſi

a-t-on fait voir ailleurs (Mém. de Paris 1756. p. 436.) que la seule différence de réfrangibilité dans les rayons produit une aberration de sphéricité très sensible dans les lunettes achromatiques.

22. Si l'on vouloit avoir égard dans l'aberration aux termes qui ont pour facteur x^4, il faudroit alors au moins six inconnues pour détruire l'aberration, & par conséquent il seroit nécessaire que l'objectif fût composé de trois lentilles non contiguës; le calcul d'ailleurs seroit alors beaucoup plus long: 1°. parce que dans l'aberration des rayons, après une seule & premiere réfraction, il faudroit avoir égard aux termes qui contiendroient x^4, & qui seroient en assez grand nombre; 2°. parce qu'il faudroit ensuite avoir égard, après deux réfractions, aux termes qui contiendroient ε, ε^2, εx^2; 3°. parce qu'on ne pourroit pas supposer dans ce calcul que l'ouverture x fût la même à la seconde réfraction qu'à la premiere, mais qu'il faudroit alors mettre au lieu de x sa valeur très approchée $x - \frac{x}{\delta'}\left(\varepsilon - \frac{x^2}{2r} + \frac{x^2}{2r'}\right)$; 4°. enfin, parce que les équations finales, qui ne sont que du second degré, lorsqu'on néglige les termes proportionels à x^4, seroient beaucoup plus élevées en ayant égard à ces termes, & par conséquent d'une solution plus difficile & plus compliquée.

23. Quoi qu'il en soit, je pense qu'il seroit très utile, même en n'ayant égard q'aux termes de l'ordre de x^2, de déterminer les dimensions d'un objectif à trois lentilles non contiguës, & à deux matieres différentes, en y rendant l'aberration nulle autant qu'il seroit possible; parce qu'il resteroit dans cet objectif deux rayons de dimension arbitraire, & dont on pourroit se servir avantageusement, soit pour faciliter la construction de l'objectif en rendant plusieurs de ses faces égales, soit pour anéantir l'aberration de sphéricité qui peut résulter de la diverse réfrangibilité des rayons: objet qui peut mériter l'attention des Opticiens, & que feu Mr. Clairaut paroit avoir eu dessein

ſein d'approfondir, comme il ſemble l'annoncer dans un de ſes Mémoires (1757. p. 550.). J'ai donné dans mon Mémoire de 1767. à l'Académie des Sciences de Paris, tout ce qui eſt néceſſaire pour le calcul de ces objectifs à trois lentilles non contiguës, que je me propoſe de faire dès que mes autres occupations me le permettront; ſuppoſé que d'autres n'entreprennent pas ce travail.

24. Si je ne craignois, Monſieur, de vous fatiguer, j'ajouterois encore un mot ſur l'aberration, des lentilles achromatiques. Suppoſons que cette aberration (je parle toujours de l'aberration de ſphéricité,) ne ſoit pas entierement détruite, & qu'elle ſoit proportionelle à $\alpha x^2 + \beta x^4$, le demi-diametre de l'ouverture étant ſuppoſé k, & b la longueur totale de l'aberration; ſi on demande la partie x' de cette aberration qui donne l'aberration latitudinale la plus grande, on trouvera par une méthode à peu près ſemblable à celle que Mr. Smith a employée dans ſon *Optique*, (Liv. II. Ch. VI. Prop. IV. art. 339.) que l'aberration latitudinale eſt en général $\frac{b}{\alpha k^2 + \beta k^4} \times [\alpha k x' - \alpha x' x' + \beta x' (k^3 - k^2 x' + k' x^2 - x'^3)]$; & faiſant la différence de cette quantité $= 0$, en regardant x' comme variable, on aura la valeur de x'. Il eſt à remarquer 1°. que l'équation aura du moins une racine réèlle, parce que la quantité qu'il s'agit de rendre un *maximum*, eſt $= 0$ lorſque $x' = 0$, & lorſque $x' = k$, & qu'ainſi il y a néceſſairement une valeur de x' réelle, répondante à $dx' = 0$; 2°. que ſi x' a plus d'une valeur réelle répondante à $dx' = 0$, il faudra prendre entre ces différentes valeurs celle qui donne la plus grande aberration latitudinale; 3°. que ſi on nomme nb la valeur cherchée de x', la moitié de l'aberration latitudinale ſera $\frac{\alpha k^3 + \beta k^5}{R} \times n$. De là on pourroit déduire aiſément l'ouverture de l'objectif & la diſtance focale de l'oculaire, en admettant les regles adoptées juſqu'ici par les Opticiens; mais j'ai déjà obſervé

Nn 2

servé combien ces regles sont fautives. Il faudra donc, pour plus d'exactitude, avoir recours à celles que j'ai données dans le troisieme Volume de mes Opuscules Ch. VI.

Vous voyez, Monsieur, par ce détail qu'il est tems de finir, combien il reste encore à faire pour perfectionner les objectifs achromatiques, sans parler de la théorie des oculaires qui est à peine ébauchée. Je suis &c.

P. S.

J'ai remarqué plus haut (Art. 7.) que si on fait constamment l'ouverture d'une lunette achromatique égale à $\frac{R}{12}$, la distance focale ϱ de l'oculaire sera constante; j'ai remarqué de plus dans ma lettre précédente que l'ouverture d'un télescope est $\frac{R}{12} \times \frac{3}{2\sqrt[4]{Q}}$ en sorte que si $Q = 5$ à peu près, cette ouverture est $\frac{R}{12}$, ce que les tables confirment d'ailleurs. Or un télescope de 5 pieds a un oculaire de $\frac{3}{10}$ de pouces de foyer; ce devroit donc être, suivant les regles communément reçues, l'oculaire constant des lunettes achromatiques qui auroient $\frac{R}{12}$ d'ouverture; ainsi l'augmentation de ces lunettes seroit $Q \times 12$ divisé par $\frac{3}{10}$, c. à d. $Q \times 40$. La lunette de 7 pieds de Mr. Antheaulme, par exemple, devroit donc augmenter 280 fois, au lieu qu'elle n'augmente que 120, faisant l'effet d'une lunette de 35 pieds. Nouvelle raison pour prouver qu'il ne faut pas donner, au moins généralement, à toutes les lunettes achromatiques une ouverture qui soit la douzieme partie de la distance focale.

SOLUTION

SOLUTION
D'UNE QUESTION TRES DIFFICILE DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS.

PAR MR. EULER.

I.

C'est le plan d'une lotterie qui m'a fourni cette question, que je me propose de développer. Cette lotterie étoit de cinq classes, chacune de 10000 billets, parmi lesquels il y avoit 1000 prix dans chaque classe, & par conséquent 9000 blancs. Chaque billet devoit passer par toutes les cinq classes; & cette lotterie avoit cela de particulier qu'outre les prix de chaque classe on s'engageoit de payer un ducat à chacun de ceux dont les billets auroient passé par toutes les cinq classes sans rien gagner. On voit bien que cette derniere dépense, à laquelle la Lotterie s'engage, est très incertaine, vu qu'il seroit possible d'un côté, que tous les prix dans chaque classe tombassent sur les mêmes numéros, & dans ce cas il y en auroit 9000 à chacun desquels il faudroit un ducat. Or, de l'autre côté, si tous les prix des cinq classes tomboient sur des numéros différens, il y auroit en tout 5000 billets gagnans, & autant de perdans, de sorte que dans ce cas ladite dépense ne monteroit qu'à 5000 ducats. L'un & l'autre de ces deux cas étant presque moralement impossible, la question est de déterminer le nombre des ducats que la lotterie sera probablement obligée de payer. Pour cet effet il faut faire un dénombrement parfait de tous les cas possibles, pour chaque nombre de ceux qui perdront dans toutes les cinq classes, depuis le plus petit de 5000 jusqu'au plus grand de 9000.

2. Pour rendre cette recherche & plus générale & plus lumineuse, je poserai

1°. Le nombre des classes de la lotterie $= k$.

2°. Le nombre des prix dans chaque classe $= n$.

3°. Le nombre des billets blancs de chacune $= m$.

4°. Donc le nombre de tous les billets $= m + n$.

Chacun de ces $m + n$ billets passe par toutes les k classes, dans chacune desquelles il gagnera ou perdra; & s'il arrive qu'il ne gagne rien dans toutes les classes, alors il jouira du bénéfice mentionné d'un ducat. Il s'agit donc d'estimer selon les regles de la probabilité le nombre des billets qui passeront par toutes les classes sans rien gagner; & d'abord, pour connoître les limites de ce nombre, supposons que tous les prix de chaque classe tombent sur les mêmes billets: dans ce cas donc il n'y aura que n billets qui gagnent, & tous les autres, dont le nombre est $= m$, seront dans le cas de recevoir un ducat, de sorte que cette dépense est de m ducats pour le fond de la lotterie, & c'est la plus grande possible. Or elle sera la plus petite lorsqu'il arrivera que tous les prix de chaque classe tombent sur des billets différens: dans ce cas le nombre de ceux qui gagnent en quelque classe que ce soit, sera $= kn$, & partant le nombre de ceux qui perdent $= m + n - kn = m - (k - 1)n$. Par conséquent la dépense dans ce cas ne sera que de $m - (k - 1)n$ ducats, en supposant que le nombre m est plus grand que $(k - 1)n$: car s'il lui étoit égal, ou même plus petit, cette dépense se réduiroit à rien.

3. Voilà donc la question dont il faut chercher la solution. Il s'agit de trouver, parmi tous les cas possibles, ceux où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les k classes sera, ou m, ou $m - 1$, ou $m - 2$, ou $m - 3$, ou $m - 4$ &c. jusqu'à $m - (k - 1)n$. Ensuite on sait par les regles de la probabilité, que chacun de ces nombres divisé par le nombre de tous les cas possibles exprime

exprime la probabilité que ce cas existe, laquelle sera d'autant plus grande qu'elle approche plus de l'unité; & si elle devenoit égale à l'unité, ce seroit une marque d'une entiere certitude. Cela arrive dans le cas d'une seule classe, où $k = 1$; attendu que le nombre des perdans est alors certainement $= m$, & l'expression pour la probabilité devient alors $= 1$, ou bien elle marque une certitude entiere. Mais, si la lotterie est composée de plusieurs classes, de sorte que $k > 1$, on aura toujours plusieurs cas à développer, selon que le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est, ou m, ou $m - 1$, ou $m - 2$, ou $m - 3$ &c. jusqu'à $m - (k - 1)n$: & ayant trouvé la probabilité de chacun de ces cas, puisqu'il faut de toute néceffité que quelcun d'eux existe, il est évident que la somme de toutes ces probabilités ensemble est égale à l'unité ou à la mesure d'une certitude entiere. Cette propriété sert d'ailleurs à vérifier les solutions qu'on donne des questions pareilles; mais ici elle me servira à trouver la solution même du probleme proposé, & je doute fort que sans ce secours on y puisse réussir.

4. Je suppose d'abord qu'on ait déjà tiré la premiere classe, & que les prix soient tombés sur les billets marqués A, B, C, D, E &c. dont le nombre est $= n$. Maintenant, en passant à la seconde classe, où il y a encore n prix, le nombre de tous les billets étant $= m + n$, je remarque que le nombre de toutes les variations possibles parmi les n billets auxquels les prix sont attachés, sans avoir égard à leur ordre,

$$\text{est} = \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\ldots\ldots(m+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad\ldots\ldots\quad n};$$

& si l'on veut aussi avoir égard à la diversité de l'ordre suivant lequel ils sortent successivement, on n'a qu'à omettre le dénominateur, & le nombre de tous les cas possibles sera $= (m+n)(m+n-1)(m+n-2)\ldots\ldots(m+1)$. Or, considérant aussi la diversité de l'ordre, le nombre de tous les cas où les prix se rencontrent avec les mêmes billets A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la premiere classe & dont le nombre est $= n$, est exprimé ainsi

1.

1. 2. 3. 4 . . . . . n. Donc, pour que les prix de la seconde classe tombent sur les mêmes billets que dans la premiere, la probabilité est =

$$\frac{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n}{(m+1)\,(m+2)\,(m+3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m+n)},$$

& que la même chose arrive aussi dans la troisieme, la probabilité est égale au quarré de cette expression, dans la quatrieme au cube, & ainsi de suite. Par conséquent, que dans toutes les k classes les prix tombent sur les mêmes billets, la probabilité sera =

$$\left(\frac{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n}{(m+1)\,(m+2)\,(m+3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m+n)}\right)^{k-1}.$$

5. Je remarque sur cette expression, 1°. que le nombre de toutes les variations possibles par rapport aux billets qui se rencontrent avec les prix, dans toutes les classes ensemble, est = $((m+1)\,(m+2)\,(m+3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m+n))^{k-1}$, en tenant aussi compte de la diversité dans l'ordre où les billets qui gagnent, sortent successivement; ensuite 2°. que le nombre de tous les cas possibles que précisément les billets marqués A, B, C, D &c. se rencontrent avec les prix dans toutes les classes, est

$$(1.\ 2.\ 3.\ 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n)^{k-1},$$

de sorte que ce nombre divisé par celui-là exprime la probabilité que ce cas existe, comme je viens de le trouver. Mais la remarque la plus essentielle, qui me conduira au but proposé, consiste en ce que le nombre de tous les cas possibles, où dans toutes les k classes les prix se rencontrent avec les mêmes billets marqués A, B, C &c. dépend uniquement 1° du nombre des prix n, ou bien de celui des billets A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la premiere classe, & 2°. du nombre des classes k de la lotterie; de sorte que le nombre des autres billets, qui est = m, n'entre point du tout en considération; ou bien, quelque grand que soit le nombre de tous les billets, le nombre des

des cas qui font gagner les mêmes billets dans toutes les classes demeure toujours le même. Qu'on n'oublie point que je parle ici toujours de toutes les variations possibles, tant dans les billets même que dans leur ordre.

6. Posons pour abréger

$$((m+1)(m+2)(m+3) \;.\;.\;.\;.\; (m+n))^{k-1} = \mathrm{M},$$

$$\& \; (1.\;2.\;3.\;4 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; n)^{k-1} = \alpha,$$

& le nombre des cas où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes soit $= m$, sera $= \alpha$, & la probabilité que quelqu'un de ces cas existe sera $= \frac{\alpha}{\mathrm{M}}$. Maintenant je passe au second cas, où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est $= m - 1$; & je remarque qu'outre les billets marqués A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la premiere classe, il faut que l'un des autres, dont le nombre est $= m$, gagne aussi dans une ou plusieurs des autres classes; puisque ce bonheur peut arriver à chacun des m billets, le nombre de tous ces cas sera exprimé par βm, où β ne renferme plus le nombre m, mais dépend uniquement des combinaisons avec les autres billets qui gagnent dans les classes suivantes. De la même maniere pour le troisieme cas, où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est $= m - 2$, il faut combiner deux billets de ceux qui ont perdu dans la premiere, qui recevant $m(m-1)$ variations, le nombre de tous ces cas aura cette forme $\gamma m(m-1)$. Pour le quatrieme cas, où le nombre des perdans par toutes les classes est $= m - 3$, le nombre de tous les cas possibles sera $= \delta m(m-1)(m-2)$; & ainsi de suite pour les cas suivans où le nombre de perdans dans toutes les classes est ou $m - 4$, ou $m - 5$, ou $m - 6$ &c. jusqu'à $m - (k-1)n$.

7. Pour voir d'un coup d'oeil toutes ces suppositions, je les représenterai de cette façon:

Nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes.	Nombre de tous les cas où cela arrive.	Probabilité que quelcun de ces cas existe.
m	α	$\frac{\alpha}{M}$
$m-1$	βm	$\frac{\beta m}{M}$
$m-2$	$\gamma m(m-1)$	$\frac{\gamma m(m-1)}{M}$
$m-3$	$\delta m(m-1)(m-2)$	$\frac{\delta m(m-1)(m-2)}{M}$
$m-4$	$\epsilon m(m-1)(m-2)(m-3)$	$\frac{\epsilon m(m-1)(m-2)(m-3)}{M}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$m-(k-1)n$	$\omega m(m-1)\ldots(m-kn+n+1)$	$\frac{\omega m(m-1)\ldots(m-kn+n+1)}{M}$

où pour abréger j'ai posé

$$M=((m+1)(m+2)(m+3)\;.\;.\;.\;.\;.\;(m+n))^{k-1}.$$

Ayant déjà trouvé la premiere valeur

$$\alpha=(1.\;2.\;3.\;4\;.\;.\;.\;.\;.\;n)^{k-1},$$

tout revient à chercher les valeurs des lettres suivantes β, γ, δ, ϵ &c. ce qui se pourroit faire suivant les principes de la combinaison & variation; mais cela demanderoit des recherches fort épineuses & ennuyantes, qu'on auroit même bien de la peine à pousser si loin qu'on en

en pût découvrir la loi de la progression : encore une telle loi conclue uniquement par induction seroit fort sujette à caution.

8. Mais la considération que toutes ces probabilités ensemble doivent être égales à l'unité, nous fournit une route fort aisée pour déterminer toutes ces quantités α, β, γ, δ &c. Nous n'avons qu'à satisfaire à cette équation :

$$M = \alpha + \beta m + \gamma m(m-1) + \delta m(m-1)(m-2) + \varepsilon m(m-1)(m-2)(m-3) \&c.$$

en observant que les quantités α, β, δ, ε &c. ne dépendent point du nombre m, mais qu'elles sont uniquement déterminées par les deux autres n & k. Voici de quelle maniere on doit conduire le raisonnement pour arriver à ce but. Puisque cette équation doit toujours avoir lieu, quelque valeur qu'on donne au nombre m, posons d'abord $m = 0$, & nous aurons

$$(1.2.3 \;.\;.\;.\;.\;.\; n)^{k-1} = \alpha,$$

d'où nous tirons la même valeur pour α, que je lui ai assignée auparavant. Posons ensuite pour m successivement les nombres 1, 2, 3, 4 &c. pour avoir ces équations

$$(2.3.4 \;.\;.\;.\;.\; (n+1))^{k-1} = \alpha + \beta,$$
$$(3.4.5 \;.\;.\;.\;.\; (n+2))^{k-1} = \alpha + 2\beta + 2\gamma,$$
$$(4.5.6 \;.\;.\;.\;.\; (n+3))^{k-1} = \alpha + 3\beta + 6\gamma + 6\delta$$
$$(5.6.7 \;.\;.\;.\;.\; (n+4))^{k-1} = \alpha + 4\beta + 12\gamma + 24\delta + 24\varepsilon,$$
$$(6.7.8 \;.\;.\;.\;.\; (n+5))^{k-1} = \alpha + 5\beta + 20\gamma + 60\delta + 120\varepsilon + 120\zeta,$$
&c.

d'où l'on tirera sans difficulté successivement les valeurs de toutes les lettres β, γ, δ, ε, ζ &c. jusqu'à la derniere ω, qu'on trouvera aisément être $= 1$, puisque le nombre des cas où tous les prix tombent sur des billets différens est

$$m(m-1)(m-2)(m-3) \;.\;.\;.\;.\;.\; (m-(k-1)n+1).$$

9. Soit, pour abréger, la valeur de M, en y posant en général $m = \lambda$ indiquée de cette sorte, $M^{(\lambda)}$, & nous aurons

$$M^{(0)} = \alpha,$$
$$M^{(1)} = \alpha + \beta,$$
$$M^{(2)} = \alpha + 2\beta + 2\gamma,$$
$$M^{(3)} = \alpha + 3\beta + 6\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} = \alpha + 4\beta + 12\gamma + 24\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

d'où prenant les différences:

$$M^{(1)} - M^{(0)} = \beta,$$
$$M^{(2)} - M^{(1)} = \beta + 2\gamma,$$
$$M^{(3)} - M^{(2)} = \beta + 4\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} - M^{(3)} = \beta + 6\gamma + 18\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

& les secondes différences seront:

$$M^{(2)} - 2M^{(1)} + M^{(0)} = 2\gamma,$$
$$M^{(3)} - 2M^{(2)} + M^{(1)} = 2\gamma + 6\delta,$$
$$M^{(4)} - 2M^{(3)} + M^{(2)} = 2\gamma + 12\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

de plus les troisiemes différences:

$$M^{(3)} - 3M^{(2)} + 3M^{(1)} - M^{(0)} = 6\delta,$$
$$M^{(4)} - 3M^{(3)} + 3M^{(2)} - M^{(1)} = 6\delta + 24\varepsilon,$$

&c.

& les quatriemes:

$$M^{(4)} - 4M^{(3)} + 6M^{(2)} + 4M^{(1)} + M^{(0)} = 24\varepsilon,$$

&c.

Sur la continuation de ces différences il ne sauroit y avoir aucun doute.

10. Toutes ces valeurs $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ &c. dérivées de $M = ((m+1)(m+2)(m+3) \ldots\ldots (m+n))^{h-1}$ étant connues & indépendantes du nombre m, les quantités α, β, γ, δ &c. qui renferment la solution de notre question, seront déterminées ainsi:

$$\alpha = M^{(0)},$$

$$\beta = \frac{M^{(1)} - M^{(0)}}{1},$$

$$\gamma = \frac{M^{(2)} - 2M^{(1)} + M^{(0)}}{1.\ 2},$$

$$\delta = \frac{M^{(3)} - 3M^{(2)} + 3M^{(1)} - M^{(0)}}{1.\ 2.\ 3},$$

$$\varepsilon = \frac{M^{(4)} - 4M^{(3)} + 6M^{(2)} - 4M^{(1)} + M^{(0)}}{1.\ 2.\ 3.\ 4},$$

&c.

Or, parmi ces diverses valeurs dérivées de M, nous connoissons les rapports suivans:

$$M^{(1)} = \left(\frac{n+1}{1}\right)^{h-1} M^{(0)},$$

$$M^{(2)} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{h-1} M^{(1)}$$

$$M^{(3)} = \left(\frac{n+3}{3}\right)^{h-1} M^{(2)},$$

$$M^{(4)} = \left(\frac{n+4}{4}\right)^{h-1} M^{(3)},$$

&c.

la premiere étant $M^{(0)} = (1 . 2 . 3 . 4 \ldots \ldots n)^{k-1}$. D'où, par cette seule valeur $M^{(0)}$, nous aurons

$$\beta = \frac{\alpha}{1}\left(\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} - 1\right),$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{1.2}\left(\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} + 1\right),$$

$$\delta = \frac{\alpha}{1.2.3}\left(\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2} . \frac{n+3}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2}\right)^{k-1} + 3\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} - 1\right),$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{1.2.3.4}\left(\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2} . \frac{n+3}{3} . \frac{n+4}{4}\right)^{k-1} - 4\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2} . \frac{n+3}{3}\right)^{k-1} + 6\left(\frac{n+1}{1} . \frac{n+2}{2}\right)^{k-1} - 4\left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} + 1\right),$$

dont la progression est également évidente.

11. Pour mieux voir la nature de ces nombres α, β, γ, δ &c. développons quelques cas particuliers, & supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un seul prix dans chaque classe, de sorte que $n = 1$, le nombre des classes demeurant $= k$. Soit $k = \pi + 1$ pour avoir $k - 1 = \pi$. Le nombre de tous les billets dans chaque classe sera donc $= m + 1$, & $M = (m + 1)^{\pi}$ & partant

$M^{(0)} = 1$; $M^{(1)} = 2^{\pi}$; $M^{(2)} = 3^{\pi}$; $M^{(3)} = 4^{\pi}$; $M^{(4)} = 5^{\pi}$ &c.

d'où

d'où nous tirons les valeurs suivantes:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{2^\pi - 1}{1}$$

$$\gamma = \frac{3^\pi - 2.2^\pi + 1}{1.\ 2}$$

$$\delta = \frac{4^\pi - 3.3^\pi + 3.2^\pi - 1}{1.\ 2.\ 3}$$

$$\varepsilon = \frac{5^\pi - 4.4^\pi + 6.3^\pi - 4.2^\pi + 1}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

&c.

si $\pi = 1$	si $\pi = 2$	si $\pi = 3$	si $\pi = 4$	si $\pi = 5$
$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$
$\beta = 1$	$\beta = 3$	$\beta = 7$	$\beta = 15$	$\beta = 31$
$\gamma = 0$	$\gamma = 1$	$\gamma = 6$	$\gamma = 25$	$\gamma = 90$
$\delta = 0$	$\delta = 0$	$\delta = 1$	$\delta = 10$	$\delta = 65$
$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 15$
$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 1$

12. Soit maintenant le nombre des prix de chaque classe $n = 2$, les deux autres nombres m & $k = \pi + 1$ demeurant indéterminés. Donc, puisque $M = (m + 1)^\pi (m + 2)^\pi$, nous aurons:

$$M^{(0)} = 2^\pi;\quad M^{(1)} = 6^\pi;\quad M^{(2)} = 12^\pi;\quad M^{(3)} = 20^\pi \text{ \&c.}$$

& partant:

$$\alpha = 2^\pi,$$

$$\beta = \frac{6^\pi - 2^\pi}{1},$$

$$\gamma = \frac{12^\pi - 2.6^\pi + 2^\pi}{1.\ 2},$$

$$\delta = \frac{20^\pi - 3.12^\pi + 3.6^\pi - 2^\pi}{1.\ 2.\ 3},$$

&c.

si $\pi = 1$	si $\pi = 2$	si $\pi = 3$
$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 8$
$\beta = 4$	$\beta = 32$	$\beta = 208$
$\gamma = 1$	$\gamma = 38$	$\gamma = 652$
$\delta = 0$	$\delta = 12$	$\delta = 576$
$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 188$
$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 24$
$\eta = 0$	$\eta = 0$	$\eta = 1$

13. Il feroit inutile de développer plufieurs cas, puisque la détermination des nombres α, β, γ, δ &c. demanderoit des calculs trop embarraffans qui même, au bout du compte, ne nous fourniroient aucun éclairciffement fur la queftion dont il s'agit. D'où l'on comprend que, fi l'on vouloit appliquer ces formules à l'exemple de la loterie rapportée au commencement, en fuppofant

$$n = 1000, \quad m = 9000, \quad \& \; k = 5,$$

d'où réfulteroit le nombre

$$M = (9001.\ 9002.\ 9003\ .\ .\ .\ .\ .\ 10000)^4,$$

& ceux qui en font dérivés

$$M^{(0)} = (1.\ 2.\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ 1000)^4,$$

$$M^{(1)} = (2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ .\ .\ 1001)^4,$$

$$M^{(2)} = (3.\ 4.\ 5\ .\ .\ .\ .\ .\ 1002)^4,$$

$$M^{(3)} = (4.\ 5.\ 6\ .\ .\ .\ .\ .\ 1003)^4,$$

on feroit obligé de s'enfoncer dans de terribles calculs avant que de parvenir à la connoiffance des nombres α, β, γ, δ &c. dont la multitude monte à 4001. Enfuite il faudroit encore multiplier chacun de ces nombres par les coëfficiens affignés au §. 7. pour avoir les nombres de tous les cas où chaque variété peut arriver. Et enfin, ayant trouvé tous ces nombres, il refteroit à divifer chacun par le nombre M, pour avoir la probabilité que le nombre de ceux qui perdent dans toutes les claffes foit ou 9000, ou 8999, ou 8998, jufqu'à ce qu'on parvienne à 5000.

14. Il eft bien certain que perfonne n'entreprendra jamais cet immenfe ouvrage, dans la feule vue de répondre aux Entrepreneurs de la loterie mentionnée, à combien ils doivent probablement eftimer la dépenfe à laquelle ils s'engagent en promettant un ducat à chacun de ceux qui n'auront rien gagné dans toutes les 5 claffes. Donc, s'il n'y avoit point d'autre moyen de fatisfaire à cette queftion, on feroit bien

bien obligé d'en regarder la solution comme moralement impossible, & il n'y auroit d'autre parti à prendre que de conseiller aux Entrepreneurs d'une pareille lotterie de s'en tenir à quelque nombre mitoyen entre la plus grande somme de 9000 ducats, & la plus petite de 5000 ducats, qui constituent les limites de cette dépense. Au reste, s'il ne s'agissoit que de tirer une seule fois cette lotterie, il ne vaudroit pas même la peine de se livrer à ce travail, quand même il ne seroit pas si difficile, puisqu'un seul coup ne se regle jamais sur la probabilité. Mais si l'on vouloit répéter plusieurs fois de suite cette même lotterie, la question deviendroit plus importante, puisqu'alors la dite dépense seroit, tantôt plus grande, tantôt plus petite: & ce n'est que dans ce cas qu'on pourroit être assuré que le milieu entre toutes ces dépenses approchera d'autant plus de la somme déterminée par les regles de la probabilité, qu'on répétera plus de fois le tirage de cette même lotterie. C'est donc cette somme moyenne que les regles de la probabilité nous doivent découvrir.

15. Or, quelque insurmontables que paroissent les calculs pour trouver cette somme, il se rencontre une certaine circonstance heureuse, qui rend extrêmement facile l'exécution de tous ces calculs, de sorte qu'on n'a pas même besoin de calculer les valeurs des nombres α, β, γ, δ &c. On n'a qu'à s'en tenir aux formules générales données dans le §. 7. & puisque pour chaque nombre de ducats, auquel la dépense peut monter, la probabilité est comme il suit:

 que

que la dépense soit de tant de ducats	la probabilité est
m	$\frac{\alpha}{M}$
$m - 1$	$\frac{\beta m}{M}$
$m - 2$	$\frac{\gamma m(m-1)}{M}$
$m - 3$	$\frac{\delta m(m-1)(m-2)}{M}$
.	.
.	.
.	.
$m - (k-1)n$	$\frac{\omega m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-(k-1)n+1)}{M}$

la somme de chaque dépense multipliée par la probabilité donnera la vraie dépense moyenne que nous cherchons, qui sera par conséquent $=$

$$\frac{\alpha m+\beta m(m-1)+\gamma m(m-1)(m-2)\ldots+\omega m(m-1)\ldots(m-(k-1)n)}{M},$$

& je remarque que la valeur de cette expression peut être assignée sans qu'on ait besoin de développer, ni les nombres α, β, γ, δ &c. ni même le dénominateur M; ce qui est sans doute un évenement auquel on ne pouvoit pas s'attendre.

16. Ayant fait voir ci-dessus, que les nombres α, β, δ &c. ne dépendent pas du nombre m, & qu'ils doivent être tels qu'il soit

$$\alpha+\beta m+\gamma m(m-1)+\delta m(m-1)(m-2)+\ldots.$$
$$+\omega m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-(k-1)n+1)$$
$$=M=((m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n))^{k-1},$$

il s'ensuit d'abord qu'écrivant $m-1$ au lieu de m, il faut qu'il soit
$\alpha+\beta(m-1)+\gamma(m-1)(m-2)+\ldots+\omega(m-1)(m-2)\ldots(m-(k-1)n)$
$=(m(m+1)(m+2)\ldots\ldots+(m+n-1))^{k-1}$,
les nombres α, β, γ, δ &c. étant les mêmes qu'auparavant. Mais cette derniere expression $\alpha+\beta(m-1)+\gamma(m-1)(m-2)+$ &c. étant multipliée par m donne précisément le numérateur de la fraction, que nous venons d'assigner pour la quantité probable de la dépense: d'où nous concluons cette dépense $=\frac{m(m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1))^{k-1}}{((m+1)(m+2)\ldots(m+n))^{k-1}}$,

qui se réduit évidemment à celle-ci $=m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$, dont l'application se fera aisément à chaque cas proposé, sans qu'on ait besoin de calculer ni les valeurs des lettres α, β, γ, δ &c. ni le nombre M. Voilà donc, contre toute attente, une solution aussi simple que belle de notre question, par laquelle nous connoissons qu'en général, le nombre des classes étant $=k$, le nombre des prix de chaque classe $=n$, & le nombre de tous les billets $=m+n$, la dépense en question doit être estimée $=m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$.

17. Pour le cas de la lotterie décrite au commencement, où $k=5$, $n=1000$ & $m=9000$, la dépense en faveur de ceux qui ne gagnent rien dans toutes les cinq classes doit être estimée à $9000\left(\frac{9}{10}\right)^4$ ducats, ce qui fait $5904\frac{9}{10}$ ducats, d'où l'on voit que ce milieu est beaucoup plus proche de la plus petite limite 5000 que de la plus grande 9000.

Soit, pour donner un autre exemple, le nombre des classes encore $k=5$, le nombre des prix de chaque classe $n=8000$, & celui de tous les billets $m+n=50000$; donc $m=42000$: & quand on s'engage de payer aussi un ducat à chacun de ceux qui

 passent

passent par les cinq classes sans rien gagner, cette dépense doit être estimée selon les regles de la probabilité à $42000 \left(\frac{42}{50}\right)^4$, c'est à dire, à $20910 \frac{6}{10}$ ducats.

18. En général, je remarque sur l'estime de cette dépense que je viens de trouver $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$, que quand il n'y aura qu'une seule classe, elle sera $= m$ auquel cas la probabilité devient une entiere certitude. Mais, si la lotterie est composée de 2 classes, cette dépense est $= \frac{mm}{m+n}$; pour trois classes elle devient $= \frac{m^3}{(m+n)^2}$, pour quatre $= \frac{m^4}{(m+n)^3}$, & ainsi de suite; de sorte qu'elle décroît en raison de $m+n$ à m pour chaque classe de plus. Donc, si le nombre des classes étoit infini, cette dépense se réduiroit à rien, quelque petit que soit le nombre des prix par rapport à tous les billets. Comme cette simple formule vient d'être conclue d'un calcul extrêmement embarrassé, il n'y a aucun doute qu'il n'y ait une autre méthode fort simple, qui y conduise directement sans aucun détour. En effet, la seule considération de cette formule nous fournit d'abord les raisonnemens qu'il faut faire pour y parvenir, que je vais mettre dans tout leur jour.

19. On n'a qu'à parcourir successivement toutes les classes, en réfléchissant que chaque classe contient en tout $m+n$ billets, parmi lesquels il y a n gains & m pertes. Donc, la premiere classe étant tirée, il y aura certainement m billets qui auront perdu; ceux-ci entrant dans la seconde classe, il est probable qu'il y en aura quelques uns, qui gagnent, & cela dans le rapport du nombre de tous les billets $m+n$ au nombre des prix n: donc, de ces m billets qui ont perdu dans la premiere classe, il y aura probablement $m.\frac{n}{m+n}$ qui gagneront dans la

seconde

seconde classe, & partant le nombre de ceux qui passent par les deux premieres classes sans rien gagner, doit être estimé $= m. \frac{m}{m+n}$. Maintenant ces billets entrent dans la troisieme classe, & par la même raison leur nombre entier sera à celui des billets qui perdront aussi dans cette classe comme $m+n$ à m; par conséquent le nombre des billets qui passeront par les trois premieres classes sans rien gagner, sera probablement $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^2$. Par ce même raisonnement on trouve que le nombre des billets qui passeront probablement par quatre classes sans rien gagner, sera $= m\left(\frac{m}{m+n}\right)^3$; & en général, si le nombre des classes est $= k$, le nombre des billets qui passeront par toutes ces classes sans rien gagner doit être fixé selon les regles de la probabilité à $m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$; & si l'on s'engage de payer à chacun un ducat, cette dépense doit être estimée à $m\left(\frac{m}{m+n}\right)^{k-1}$ ducats, ce qui est précisément la somme que j'ai trouvée auparavant.

20. Si cette route est préférable à la premiere à cause de sa simplicité, la premiere a d'autres avantages très considérables en nous découvrant en détail la probabilité, que la dépense égale précisément une somme donnée. Car, comme il n'est pas même probable que la dépense actuelle soit la même que montre la probabilité, il est très important que le dénombrement de tous les cas possibles nous soit bien connu pour nous mettre en état de juger de la probabilité de chacun. Mais la derniere méthode a pourtant cet avantage sur la premiere, qu'elle peut être appliquée à des cas où toutes les classes de la lotterie ne contiennent pas le même nombre de prix; laquelle circonstance rendroit presque

impossible la premiere méthode. Cependant il faut toujours supposer que le nombre de tous les billets soit le même dans toutes les classes, puisque sans cette condition la question dont il s'agit ne sauroit avoir lieu. Soit donc l le nombre de tous les billets de chaque classe, & posons le nombre de ceux qui perdent dans la premiere classe $= m$, dans la seconde $= m'$, dans la troisieme $= m''$, dans la quatrieme $= m'''$ & ainsi de suite. Cela posé, le nombre des billets qui perdront dans toutes les classes sera probablement:

$$m \cdot \frac{m'}{l} \cdot \frac{m''}{l} \cdot \frac{m'''}{l} \cdot \frac{m^{IV}}{l} \cdot \frac{m^{V}}{l} \cdot \&c.$$

jusqu'à ce qu'on ait parcouru toutes les classes. D'où l'on voit que s'il y avoit une seule classe où tous les billets gagnassent, quelqu'un des nombres m, m', m'', m''' &c. évanouiroit, & le nombre trouvé se réduiroit à zéro; ce qui ne seroit plus la mesure de la probabilité, mais une certitude complette.

21. Pour en donner un exemple, supposons qu'il y ait une lotterie composée de 5 classes, chacune renfermant 10000 billets: & dont la premiere contienne 1000 prix, la seconde 2000, la troisieme 3000, la quatrieme 4000, & la cinquieme 5000. Nous aurons donc $l =$ 10000, & les nombres des billets qui perdent dans chaque classe seront: $m = 9000$; $m' = 8000$; $m'' = 7000$; $m''' = 6000$; $m^{IV} = 5000$. Et partant le nombre des billets qui passeront par toutes les 5 classes, sans rien gagner, sera conformément aux regles de la probabilité $= 9000 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = 1512$; ou bien on peut estimer qu'il n'y aura que 1512 billets qui perdront dans toutes les 5 classes; donc il est probable que de tous les 10000 billets il y en aura 8488 qui tireront quelque prix dans une ou plusieurs classes. Par conséquent, pour ceux qui s'intéresseroient dans cette lotterie, on peut dire que la probabilité est $\frac{8488}{10000}$ ou $\frac{1061}{1250}$, qu'ils ne passeront point par toutes les 5 classes sans rien gagner.

SUR

SUR L'ÉLIMINATION DES INCONNUES DANS LES ÉQUATIONS.

PAR MR. DE LA GRANGE (*).

Lorsqu'on a deux équations qui renferment la même inconnue élevée à des degrés quelconques, on peut toujours par les regles ordinaires de l'Algebre éliminer cette inconnue; mais on risque de tomber dans un inconvénient; c'est que l'équation résultante de l'élimination monte à un degré plus élevé qu'elle ne doit. Plusieurs habiles Géometres ont senti cet inconvénient & ont donné des moyens de l'éviter; c'est ce que Mrs. Euler, Cramer, Bezout & d'autres ont fait par des méthodes qui leur sont propres, & qu'on peut voir dans les Mémoires de cette Académie pour les années 1748 & 1764, dans ceux de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1764, dans l'Ouvrage de Mr. Cramer qui a pour titre *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, & ailleurs.

La méthode que je vais exposer ici a l'avantage de réduire l'élimination des inconnues à des formules générales & très simples dont les Analistes pourront faire usage au besoin.

Soient

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c. = 0 \quad (A),$$

$$1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^4} + \&c. = 0 \quad (B),$$

les

(*) Lû à l'Académie le 29 Octobre 1767.

les deux équations proposées, dont la premiere soit d'un degré quelconque m, & la seconde aussi d'un degré quelconque n. Il est évident que quelles que soient les équations données elles peuvent toujours se mettre sous les deux formes précédentes; car pour cela il n'y a qu'à les diviser, l'une par le coëfficient tout connu du dernier terme, & l'autre par la plus haute puissance de l'inconnue.

Je suppose que $1 - \alpha x$, $1 - \beta x$, $1 - \gamma x$, $1 - \delta x$ &c. soient les facteurs de l'équation (A) en sorte que $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$ &c. soient les racines de cette équation; j'aurai donc

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.$$
$$= (1 - \alpha x)(1 - \beta x)(1 - \gamma x)(1 - \delta x) \ldots,$$

& prenant les logarithmes de part & d'autre

$$l(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.)$$
$$= l(1 - \alpha x) + l(1 - \beta x) + l(1 - \gamma x) + l(1 - \delta x) + \&c.$$

Or on sait que $l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \&c.$ donc on aura aussi

$$x(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.)$$
$$- \frac{x^2}{2}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.)^2$$
$$+ \frac{x^3}{3}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.)^3$$
&c.

$$= - x(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.)$$
$$- \frac{x^2}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \&c.)$$
$$- \frac{x^3}{3}(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \&c.)$$
&c.

On ſait de plus que le quarré, le cube &c. de tout polinome tel que $A + Bx + Cx^2 + \&c.$ eſt auſſi un polinome de la même forme, mais dont le nombre des termes eſt double, triple &c.; de ſorte qu'on peut ſuppoſer

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.)^2$$
$$= A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \&c.,$$
$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.)^3$$
$$= A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \&c.$$

& ainſi de ſuite; les coëfficiens A', B', C' &c. A'', B'', C'' &c. étant aiſés à trouver par la formation actuelle de ces puiſſances, ou par d'autres moyens que nous indiquerons dans la ſuite.

Donc, ſi on ſubſtitue ces valeurs, & qu'on faſſe pour abréger

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c. = - P,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \&c. = - 2Q,$$
$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \&c. = - 3R,$$
&c.

on aura, en ordonnant les termes par rapport aux dimenſions de x,

$$Ax + \left(B - \frac{A'}{2}\right)x^2 + \left(C - \frac{B'}{2} + \frac{A''}{3}\right)x^3$$
$$+ \left(D - \frac{C'}{2} + \frac{B''}{3} - \frac{A'''}{4}\right)x^4 + \&c.$$
$$= Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \&c.$$

d'où l'on tire, à cauſe que l'équation doit être identique,

$$P = A,$$
$$Q = B - \frac{A'}{2},$$
$$R = C - \frac{B'}{2} + \frac{A''}{3},$$
$$S = D - \frac{C'}{2} + \frac{B''}{3} - \frac{A'''}{4},$$
&c.

Cela poſé, je ſubſtitue ſucceſſivement dans l'équation (B) les valeurs de x réſultantes de l'équation (A), ſavoir $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ &c. dont le nombre eſt m; j'aurai les m équations ſuivantes:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + d\alpha^4 + \&c. = 0 \\ 1 + a\beta + b\beta^2 + c\beta^3 + d\beta^4 + \&c. = 0 \\ 1 + a\gamma + b\gamma^2 + c\gamma^3 + d\gamma^4 + \&c. = 0 \end{array}\right\} \cdots (C),$$
&c.

Or il eſt clair que, pour que les deux équations (A), & (B) aient lieu en même tems, il faut néceſſairement qu'une quelconque des m équations (C) ait lieu; donc, comme il n'y a pas de raiſon pourquoi l'une de ces équations doive plutôt avoir lieu que l'autre; il faudra que l'on ait une équation qui renferme toutes les équations (C) & qui ne puiſſe

puisse être vraie qu'en supposant que l'une quelconque de ces dernieres équations le soit; d'où il s'ensuit que l'équation dont il s'agit ne sauroit être que le produit de toutes les équations (C); & cette équation sera par conséquent celle qui doit résulter de l'élimination de l'inconnue x dans les deux équations proposées (A), & (B).

Donc, si on représente l'équation dont nous parlons par $\Pi = 0$, on aura

$$\Pi = (1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + d\alpha^4 + \&c.)\times$$
$$(1 + a\beta + b\beta^2 + c\beta^3 + d\beta^4 + \&c.)\times$$
$$(1 + a\gamma + b\gamma^2 + c\gamma^3 + d\gamma^4 + \&c.)\times$$
$$(1 + a\delta + b\delta^2 + c\delta^3 + d\delta^4 + \&c.)\times$$
$$\&c.$$

le nombre des facteurs étant m; ainsi la difficulté se réduit à trouver la valeur de Π sans connoître les racines α, β, γ &c.

Prenons les logarithmes des deux membres, & nous aurons

$$l\Pi = l(1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + d\alpha^4 + \&c.)$$
$$+ l(1 + a\beta + b\beta^2 + c\beta^3 + d\beta^4 + \&c.)$$
$$+ l(1 + a\gamma + b\gamma^2 + c\gamma^3 + d\gamma^4 + \&c.)$$
$$+ l(1 + a\delta + b\delta^2 + c\delta^3 + d\delta^4 + \&c.)$$
$$\&c.$$

Mais on a

$$l(1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + d\alpha^4 + \&c.)$$
$$= \alpha(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \&c.)$$
$$- \frac{\alpha^2}{2}(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \&c.)^2$$
$$+ \frac{\alpha^3}{3}(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \&c.$$
$$- \&c.$$

Donc

Donc, si on suppose que a', b', c' &c. a'', b'', c'' &c. &c. soient des quantités formées de a, b, c &c. comme les quantités A′, B′, C′ &c. A″, B″, C″ &c. &c. le sont de A, B, C &c., on aura

$$l(1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \&c.)$$
$$= \alpha(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \&c.)$$
$$- \frac{\alpha^2}{2}(a' + b'\alpha + c'\alpha^2 + d'\alpha^3 + \&c.)$$
$$+ \frac{\alpha^3}{3}(a'' + b''\alpha + c''\alpha^3 + d''\alpha^4 + \&c.)$$
$$- \&c.$$

où bien, en faisant pour abréger

$$p = a,$$
$$q = b - \frac{a'}{2},$$
$$r = c - \frac{b'}{2} + \frac{a''}{3},$$
$$s = d - \frac{c'}{2} + \frac{b''}{3} - \frac{a'''}{4},$$
&c.

$$l(1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + d\alpha^4 + \&c.)$$
$$= p\alpha + q\alpha^2 + r\alpha^3 + s\alpha^4 + \&c.$$

On trouvera de la même maniere

$$l(1 + a\beta + b\beta^2 + c\beta^3 + d\beta^4 + \&c.)$$
$$= p\beta + q\beta^2 + r\beta^3 + s\beta^4 + \&c.$$
$$l(1 + a\gamma + b\gamma^2 + c\gamma^3 + d\gamma^4 + \&c.)$$
$$= p\gamma + q\gamma^2 + r\gamma^3 + s\gamma^4 + \&c.$$

& ainsi des autres;

Donc

Donc ajoutant ensemble toutes ces quantités, & mettant à la place de $\alpha + \beta + \gamma +$ &c. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 +$ &c. $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 +$ &c. &c. les quantités $- P$, $- 2Q$, $- 3R$ &c. on aura

$$l\Pi = - pP - 2qQ - 3rR - \&c.$$

Soit encore pour abréger

$$\Phi = pP + 2qQ + 3rR + \&c.$$

& l'on aura $l\Pi = - \Phi$, d'où $\Pi = e^{-\Phi}$, & résolvant en série la quantité exponentielle $e^{-\Phi}$, il viendra enfin

$$\Pi = 1 - \Phi + \frac{\Phi^2}{2} - \frac{\Phi^3}{2.3} + \&c.$$

Ainsi le probleme est résolu.

II.

Comme la quantité Π est le produit de m facteurs tels que $1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \&c.$, $1 + a\beta + b\beta^2 + c\beta^3 + \&c.$, $1 + a\gamma + b\gamma^2 + c\gamma^3 + \&c.$ &c. il est visible qu'elle ne peut contenir d'autres produits des quantités a, b, c &c. que ceux dont les dimensions ne passent pas le nombre m; d'où il s'ensuit

1°. que l'équation $\Pi = 0$, ou bien

$$1 - \Phi + \frac{\Phi^2}{2} - \frac{\Phi^3}{2.3} + \&c. = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (D),$$

ne doit contenir aucun terme dans lequel les quantités, a, b, c &c. forment ensemble des produits de plus de m dimensions.

Or, si on met $\frac{1}{x}$ au lieu de x dans les équations (B) & (A), elles deviennent celles-ci

$$1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \&c. = 0,$$

$$1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \&c. = 0,$$

les-

lesquelles ne different des équations (A), & (B) qu'en ce que les coëfficiens A, B, C &c. sont changés en *a*, *b*, *c* &c. & l'exposant m en n, & *vice versâ*; donc, si on fait sur ces équations les mêmes raisonnemens & les mêmes opérations que nous avons faites sur les équations (A), & (B), on parviendra à une équation finale qui sera la même que l'équation (D) ci-dessus, à la seule différence près que *a*, *b*, *c* &c. seront au lieu de A, B, C &c. & réciproquement; & l'on prouvera de même à l'égard de cette équation que les quantités A, B, C &c. ne sauroient former ensemble des produits de plus de n dimensions.

Or, en changeant A, B, C &c. en *a*, *b*, *c* &c. on ne fait que changer P, Q, R &c. en *p*, *q*, *r* &c. & *vice versâ*, comme on le voit par les expressions de ces quantités: donc, comme $\Phi = pP + 2qQ + 3rR +$ &c.; il s'ensuit que l'équation finale dont il s'agit sera exactement la même que l'équation (D); d'où je conclus

2°. que l'équation

$$1 - \Phi + \frac{\Phi^2}{2} + \frac{\Phi^3}{2 \cdot 3} + \text{\&c.} = 0,$$

ne doit pas non plus contenir aucun terme où les quantités A, B, C &c. se trouvent formant ensemble des produits de plus de n dimensions.

III.

Voici donc à quoi se réduit notre méthode d'élimination. Etant proposées les équations

$$(A) \quad 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{\&c.} = 0,$$

$$1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^4} + \text{\&c.} = 0,$$

dont la premiere soit du degré m, & la seconde du degré n, on commencera par former les quantités A', B', C', D', &c. A'', B'', C'', D'' &c. A''', B''', C''', D''' &c. &c. lesquelles sont les coëfficiens des séries qui

expri-

exprimeent le quarré, le cube, la quatrieme puissance &c. de la série $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. & on poussera cette opération jusqu'à la n^{eme} puissance. On formera ensuite de la même maniere les quantités a', b', c', d' &c. a'', b'', c'', d'' &c. a''', b''', c''', d''' &c. jusqu'à la puissance m; & pour cela il suffira de changer dans les valeurs correspondantes de A', B', C' &c. A'', B'' &c. &c., les quantités A, B, C, D &c. en a, b, c, d &c.

Ayant ainsi toutes ces quantités, on les substituera dans la quantité

$$\Phi = Aa + 2\left(B - \frac{A'}{2}\right)\left(b - \frac{a'}{2}\right)$$
$$+ 3\left(C - \frac{B'}{2} + \frac{A''}{3}\right)\left(c - \frac{b'}{2} + \frac{a''}{3}\right)$$
$$+ 4\left(D - \frac{C'}{2} + \frac{B''}{3} - \frac{A'''}{4}\right)\left(d - \frac{c'}{2} + \frac{b''}{3} - \frac{a'''}{4}\right)$$
$$+ \text{\&c.}$$

& l'on fera ensuite l'équation

$$1 - \Phi + \frac{\Phi^2}{2} - \frac{\Phi^3}{2.3} + \frac{\Phi^4}{2.3.4} - \text{\&c.} = 0,$$

en observant de rejetter tous les termes qui contiendroient des produits de A, B, C &c. de plus de n dimensions, ou des produits de a, b, c &c. de plus de m dimensions; on aura par ce moyen l'équation qui résulte de l'élimination de l'inconnue x dans les deux équations proposées.

IV.

A l'égard des coëfficiens A', B', C' &c. A'', B'' &c. &c. on doit les déterminer à l'ordinaire par la formation des différentes puissances de $A + Bx + Cx^2 +$ &c. mais, comme le calcul des puissances fort hautes seroit assez laborieux, on peut l'abréger par la formule suivante, dont la démonstration se tire du calcul différentiel.

Soit

Soit en général

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.)^n$$
$$= P + Qx + Rx^2 + Sx^3 + Tx^4 + \&c.$$

on aura

$$P = A^n,$$

$$Q = \frac{nBP}{A},$$

$$R = \frac{(n-1)BQ + 2nCP}{2A},$$

$$S = \frac{(n-2)BR + (2n-1)CQ + 3nDP}{3A},$$

$$T = \frac{(n-3)BS + (2n-2)CS + (3n-1)DQ + 4nEP}{4A},$$

& ainsi de suite; & il est très aisé de voir la loi de cette série, & de la continuer autant qu'on voudra.

Si on ne vouloit pas faire dépendre les coëfficiens P, Q, R &c. les uns des autres, on pourroit les déterminer immédiatement de la maniere suivante. Qu'on cherche, par exemple, le coëfficient de x^m dans la puissance n du polinome $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$, je dis 1°. que ce coëfficient sera formé de tous les termes qui peuvent être représentés par $A^p B^q C^r D^s$ - - -, p, q, r, s &c. étant des nombres entiers positifs, & tels que $p + q + r + s + \&c. = n$, & $q + 2r + 3s + \&c. = m$;

2°. que chacun de ses termes aura pour coëfficient numérique

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 \ - - - - - - - - - \ n}{(1.2.3 - - - p)(1.2.3 - - - q)(1.2.3 - - - r) - - -},$$

La démonstration de ce théoreme est aisée à tirer de la théorie des combinaisons, & nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

V.

V.

Exemple 1. Que l'on ait à éliminer x des deux équations

$$1 + Ax + Bx^2 = 0, \quad 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} = 0,$$

on trouvera, en faisant le quarré de $A + Bx$,

$A' = A^2$, $B' = 2AB$, $C' = B^2$, & de même

$a' = a^2$, $b' = 2ab$, $c' = b^2$,

donc

$$\phi = Aa + 2\left(B - \frac{A^2}{2}\right)\left(b - \frac{a^2}{2}\right) + 3ABab + B^2b^2,$$

$$= Aa + 2Bb - A^2b - aB^2 + \frac{A^2a^2}{2} + 3ABab + B^2b^2.$$

Donc, en négligeant les produits de A, & B, aussi bien que ceux de a, & b, qui seroient de plus de deux dimensions, on aura

$\phi^2 = A^2a^2 + 2ABab + 4B^2b^2$,

$\phi^3 = 0$, $\phi^4 = 0$ &c.

Substituant donc ces valeurs dans l'équation $1 - \phi + \frac{\phi^2}{2} - \&c. = 0$, on aura

$$1 - Aa - 2Bb + A^2b + Ba^2 - ABab + B^2b^2 = 0.$$

VI.

Au reste, on peut encore trouver la valeur de ϕ d'une maniere plus simple sans être obligé de calculer les quantités A', B', C' &c. A'', B'' &c.

Pour cela on remarquera que

$$\phi = Pp + 2Qq + 3Rr + 4Ss + \&c.$$

de sorte que la difficulté se réduit à trouver les quantités P, Q, R &c. & p, q, r &c.

Or il est facile de voir par l'Art. 1. que

$$l(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \&c.)$$
$$= Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \&c.$$

Qu'on différentie cette équation en faisant varier x, & l'on aura, après avoir divisé par dx,

$$\frac{A + 2Bx + 3Cx^2 + \&c.}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \&c.}$$
$$= P + 2Qx + 3Rx^2 + 4Sx^3 + \&c.$$

Donc, multipliant en croix & comparant les termes, on aura

$$A = P,$$
$$2B = 2Q + AP,$$
$$3C = 3R + 2AQ + BP,$$
$$4D = 4S + 3AR + 2BQ + CP,$$
&c.

d'où l'on tire

$$P = A,$$
$$Q = \frac{2B - AP}{2},$$
$$R = \frac{3C - 2AQ - BP}{3},$$
$$S = \frac{4D - 3AR - 2BQ - CP}{4},$$

& ainsi de suite.

Ayant

Ayant déterminé ainsi les quantités P, Q, R &c. par les quantités A, B, C &c. on changera ces dernieres en a, b, c &c. & l'on aura les valeurs des quantités p, q, r &c.

On se souviendra seulement de rejetter dans les expressions de P, Q, R &c. les termes où A, B, C &c. formeroient des produits de plus de n dimensions, & dans celles de p, q, r &c. les termes où a, b, c &c. formeroient des produits de plus de m dimensions.

VII.

Si on met pour plus de simplicité 2Q, 3R, 4S &c. au lieu de Q, R, S &c. & de même $2q$, $3r$, $4s$ &c. à la place de q, r, s &c. la valeur de ϕ deviendra

$$\phi = Pp + \frac{Qq}{2} + \frac{Rr}{3} + \frac{Ss}{4} + \&c.$$

& l'on aura pour la détermination de P, Q, R &c. les formules suivantes

$$P = A,$$
$$Q = 2B - AP,$$
$$R = 3C - BP - AQ,$$
$$S = 4D - CP - BQ - AR,$$
$$T = 5E - DP - CQ - BR - AS,$$

& ainsi de suite. Il en sera de même pour les quantités p, q, r &c. en changeant seulement A en a, B en b, C en c &c., & l'équation sera, comme ci-dessus,

$$1 - \phi + \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^3}{2.3} + \&c. = 0,$$

dans laquelle il ne faudra conserver que les termes où les dimensions des produits de A, B, C &c. seront = ou < n, & ceux où les dimensions des produits de a, b, c &c. seront = ou < m.

 VIII.

VIII.

Exemple 2. On propose d'éliminer x des équations

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 = 0,$$

$$1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} = 0.$$

On trouvera d'abord

$$P = A,$$
$$Q = 2B - A^2,$$
$$R = 3C - 3AB + A^3,$$
$$S = -4AC - 2B^2 + 4A^2B,$$
$$T = -5BC + 5A^2C + 5AB^2,$$
$$U = -3C^2 + 12ABC + 2B^3,$$
$$V = 7AC^2 + 7B^2C,$$
$$W = 8BC^2,$$

donc on aura

$$\begin{aligned}\Phi = {} & Aa + \tfrac{1}{2}(2B - A^2)(2b - a^2) \\ & + \tfrac{1}{3}(3C - 3AB + A^3)(3c - 3ab + a^3) \\ & + \tfrac{1}{4}(-4AC - 2B^2 + 4A^2B)(-4ac - 2b^2 + 4a^2b) \\ & + \tfrac{1}{5}(-5BC + 5A^2C + 5AB^2)(-5bc + 5a^2c + 5ab^2) \\ & + \tfrac{1}{6}(-3C^2 + 12ABC + 2B^3)(-3c^2 + 12abc + 2b^3) \\ & + \tfrac{1}{7}(7AC^2 + 7B^2C)(7ac^2 + 7b^2c) \\ & + \tfrac{1}{8}\, 8BC^2 \times 8bc^2.\end{aligned}$$

Or, en rejetant les termes où A, B, C, & a, b, c sont des produits de plus de deux dimensions, & ordonnant les autres par rapport aux dimensions de ces mêmes quantités, on auroit

$\Phi =$

$$\varphi = Aa + 2Bb + 3Cc$$
$$- Ba^2 - 3Cab - bA^2 - 3cAB$$
$$+ \frac{A^2a^2}{2} + 3ABab + (2AC + B^2)(2ac + b^2)$$
$$+ 5BCbc + \tfrac{1}{2}C^2c^2,$$

d'où je tire, en ne conſervant que les produits de trois ou d'un moindre nombre de dimenſions,

$$\varphi^2 = (Aa + 2Bb + 3Cc)^2$$
$$+ 2(Aa + 2Bb + 3Cc)(- Ba^2 - 3Cab$$
$$- bA^2 - 3cAB + \frac{A^2a^2}{2} + 3ABab$$
$$+ (2AC + B^2)(2ac + b^2) + 5BCbc + \tfrac{1}{2}C^2c^2)$$
$$+ 2(Ba^2 + 3Cab)(bA^2 + 3cAB);$$

&

$$\varphi^3 = (Aa + 2Bb + 3Cc)^3,$$
$$\varphi^4 = 0,$$

de ſorte que l'équation ſera

$$1 - Aa - \tfrac{1}{2}(2B - A^2)(2b - a^2)$$
$$- \tfrac{1}{3}(3C - 3AB + A^3)(3c - 3ab + a^3)$$
$$- \tfrac{1}{4}(-4AC - 2B^2 + 4A^2B)(-4ac - 2b^2 + 4a^2b)$$
$$- \tfrac{1}{5}(-5BC + 5A^2C + 5AB^2)(-5bc + 5a^2c + 5ab^2)$$
$$- \tfrac{1}{6}(-3C^2 + 12ABC + 2B^3)(-3c^2 + 12abc + 2b^3)$$
$$- \tfrac{1}{7}(7AC^2 + 7B^2C)(7ac^2 + 7b^2c)$$
$$- 8BC^2bc^2 + (Aa + 2Bb + 3Cc) \times$$

$$\left(\frac{Aa + 2Bb + 3Cc}{2} - Ba^2 - 3Cab\right.$$

$$- bA^2 + 3cAB + \frac{A^2a^2}{2} + 3ABab$$

$$\left. + (2AC + B^2)(2ac + b^2) + 4BCbc + \frac{9}{2}C^2c^2\right)$$

$$+ (Ba^2 + 3Cab) \times (bA^2 + 3cAB)$$

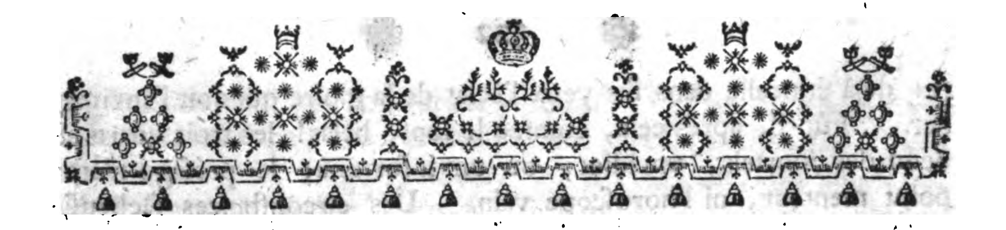
$$- \frac{1}{2.3}(Aa + 2Bb + 3Cc)^3 = 0.$$



MÉMOIRES

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.



SUR

LA CULTURE DE L'ENTENDEMENT.

PAR MR. FORMEY (*).

A tout prendre, l'homme est dans l'embarras des richesses: & ce nonobstant, la misere est son lot le plus ordinaire. Je n'ai garde de faire, avec l'orgueilleuse secte du Portique, sinon de chaque mortel, au moins du Sage, le Roi de la nature, qui voit tout à ses pieds, pour qui toutes les spheres tournent, qui n'a d'autre égal, ou bien, (car il ne faut pas extravaguer au lieu d'outrer,) qui ne reconnoît d'autre supérieur que le maître même des cieux & de la terre. A quiconque forme de pareilles prétentions, il n'y a qu'une réponse à faire; c'est de lui conseiller une prise d'hellébore.

Non, je prens l'homme dans sa foible origine; je vous le présente dans son berceau; je ne vous déguise aucune des infirmités qui l'y assaillent, & qui lui tiennent fidele compagnie jusqu'au tombeau; mais, avec tout cela, je vois en lui, soit qu'il naisse sous l'humble toit d'une chaumiere abjecte, ou sous les lambris dorés du plus superbe palais, j'y vois le possesseur présomtif des plus rares avantages, des plus riches trésors. Déjà sur son front rayonne sa grandeur future:

(*) Lû le 15 Juin 1769.

re : déjà étincelle dans ſes yeux l'éclat de la gloire qui doit l'environner. Fût-il, après cela, comme le ſont, hélas! les trois quarts & demi des mortels, un idiot, ou un infortuné; le préſage n'étoit point menteur, ni l'horoſcope vain. – Des circonſtances fâcheuſes l'ont plongé dans ces déplorables états; des circonſtances favorables pouvoient l'élever au faîte des lumieres & des grandeurs.

L'homme eſt perfectible. Ce mot dit tout. La perfectibilité lui eſt eſſentielle, mais le développement de cette perfectibilité eſt accidentel, & ſes limites ſont inaſſignables. L'homme eſt propre à tout. Le cheval s'élance dans la carriere, le boeuf trace le ſillon, le chien ſuit la piſte : mais l'homme voit des routes innombrables s'offrir à ſon choix; & du centre des abymes au ſein de la voûte azurée, il traverſe tous les eſpaces, il franchit toutes les barrieres, il ſurmonte tous les obſtacles.

Un homme d'eſprit, un Philoſophe même, a ſoutenu dans ce ſiecle, & ſoutient peut-être encore, (quoique l'expérience doive l'avoir détrompé,) qu'il ſuffit à l'homme de vouloir pour faire, d'entreprendre pour réuſſir; & que, ſi quelcun, à l'entrée de ſa carriere, en ſe ſervant de tous les moyens, en ſe procurant tous les ſecours qui ſont à ſa portée, en faiſant une continuité d'efforts bien meſurés, ſe mettoit en tête d'arriver à un but quelconque, de devenir un Newton ou un Leibnitz, d'acquérir des millions, d'obtenir des titres & des dignités, il en viendroit à bout. C'eſt là ſans doute un paradoxe, mais ce n'eſt point une abſurdité. Il y a là deſſous un fond de vérité, & même une doctrine très importante, à laquelle les hommes ne font presque jamais d'attention. C'eſt que leur ſort, généralement parlant, & ſauf les cas qu'on ne ſauroit ni prévoir, ni prévenir, eſt entre leurs mains; que leurs maux viennent presque tous de cette inertie qui leur lie les bras, qui engourdit en eux des facultés au moyen desquelles leur vie ſeroit marquée de plus de proſpérités qu'elle ne l'eſt d'adverſités. Tout homme a un champ à défricher: qu'il le tourne & le retourne : il y trouvera un tréſor. Tout homme a quelque talent à faire valoir: mais, de mille talens, il y en a toujours neuf

cent

cent nonante neuf qui demeurent enfouis. On ne deviendroit pas Empereur, ni Pape, avec ce talent: une pareille perſpective eſt une belle chimere, un ſonge agréable, ou ſi l'on veut, un ſimple jeu d'eſprit: mais le ſérieux, le réel, (ſans inſiſter ſur des exemples tels que ceux de Sixte V. & de Sforce, premier Duc de Milan,) c'eſt qu'on ſe feroit un état, on ſe tireroit du pair; qu'il n'y a qu'à le vouloir efficacement; & que, pour le vouloir efficacement, il ſuffit de le vouloir fortement. J'en prens à témoin tant d'avares, tant d'ambitieux, tant d'hommes animés d'une paſſion quelconque: ne ſe sont-ils pas enrichis, élevés, ſatisfaits, parce que n'ayant qu'un objet & concentrant toutes leurs forces à ſa pourſuite, ils ont applani des montagnes, comblé des vallées, percé même des rochers, fait en un mot tout ce qui n'étoit pas impoſſible? Quand, avec une extreme ardeur & un travail aſſidu, on n'obtiendroit pas préciſément ce qu'on recherche, on obtient toujours quelque choſe. Voyez l'Alchimiſte, le plus chimérique en apparence de tous les chercheurs & de tous les travailleurs. C'eſt à lui pourtant que la Chimie eſt redevable de pluſieurs belles découvertes. Il vouloit de l'or; il a trouvé d'autres produits qui valent de l'or.

Mais, de quel inſtrument avons-nous principalement beſoin pour prétendre à de pareils ſuccès & les obtenir? Le titre de notre Mémoire l'annonce; & j'entre en matiere. Les forces du corps ne ſont que des manoeuvres; les forces de l'ame ſont des Architectes, des Artiſtes, des Capitaines, des Politiques, des Législateurs, des Héros, & ce qui eſt le *non plus ultra*, des Philoſophes. Voilà la perſpective. A-t-elle des charmes pour vous? Cultivez votre entendement. C'eſt la culture qui rapporte le plus: pourquoi faut-il que ce ſoit celle dont on s'occupe le moins! J'ai bien des choſes à dire là deſſus: je vais tâcher d'y mettre de l'ordre & de la préciſion.

Avant tout, & pour n'y plus revenir, je déclare qu'en faiſant abſtraction du corps, je n'ai garde de le mépriſer, de méconnoître l'utilité, l'importance, *l'eſſentialité*, ſi je puis m'exprimer ainſi, des ſer-

 vices

vices qu'il nous rend. Je ferois également un Discours sur la culture du corps; mais je le regarde comme tout fait. Il n'y a point de Traité d'éducation morale qui ne doive être précédé d'un Traité d'éducation physique; il n'y a point d'ame qui puisse exécuter ses opérations, si la Nature ne l'a pourvue d'un bon domicile & si l'on n'a soin d'empêcher non seulement que ce domicile ne se détériore, mais même si on ne le fortifie & le perfectionne. Un des plus célebres Ecrivains de ce siecle a porté à l'excès les attentions qu'il croit dues à la machine; elles ne servent, selon moi, qu'à la durcir, à la roidir, au lieu de l'adapter au service de l'ame. Mais cette controverse a déjà été traitée de maniere à l'épuiser. Je m'en tiens ici à ce qui est avoué: il faut un corps à l'ame, il le lui faut bien organisé par la Nature, bien entretenu par l'éducation. C'est à l'hôte de cette demeure que j'adresse la parole, & que je répete cette exhortation: Cultivez votre entendement.

Cependant à qui parlé-je? Est-ce à cet enfant que je vous ai déjà montré au berceau? Le son de ma voix frappe ses oreilles; il tourne les yeux vers moi; il me tend même les bras: mais réellement il ne me voit, ni ne m'entend, c'est à dire, qu'il ne sçait, ni qui je suis, ni ce que je lui dis. Laissons-le donc croître en connoissance aussi bien qu'en stature, & attendons le moment favorable pour trouver l'accès libre à son ame. Ce moment viendra-t-il & quand? A trois ans il babille, à six il juge & raisonne: on va le mettre dans la carriere des instructions. Cela fait-il ou promet-il un entendement, je ne dirai pas cultivé, mais seulement défriché? Pas le moins du monde. C'est un perroquet à qui l'on apprend à parler: & tout le reste de sa vie il ne fera que répéter ce qu'il entend à présent. Je n'exagere point. Il n'y a que *Psittacisme* dans le monde. C'est la marche & l'effet de toutes les éducations. Employons une autre comparaison. On démaillotte le corps au bout d'un espace de tems assez court: mais le maillot de l'ame dure presque toujours autant que la vie & ne fait place qu'au linceul mortuaire.

Tout est passif de la part de l'éleve: il reçoit des impressions quelconques sans y apporter aucune modification; il voit ce qu'on lui

fait

fait voir, il croit ce qu'on lui fait croire; & il est censé parfaitement bien élevé quand il pense & parle comme son pere ou comme son précepteur. Ce n'est donc point à l'enfant, à l'adolescent, qu'il convient de s'adresser ici: il ne sauroit se former lui-même, pas plus qu'un vase d'argille sous la roue du potier; mais c'est aux instituteurs que doit être présentée la requête de faire penser leurs éleves, de développer & d'exercer en eux les facultés au moyen desquelles on acquiert des connoissances réfléchies, on peut se rendre témoignage à soi-même qu'on sçait quelque chose & qu'on a la certitude en partage. Or débiter ces maximes, inculquer ces préceptes dans les éducations ordinaires, c'est parler un langage inconnu, c'est révolter des gens qui croyent faire des merveilles en moulant & calquant exactement sur eux-mêmes ceux dont l'ame encore tendre est confiée à leurs soins. Tournez-vous de tous les côtés dans les familles, dans les Colleges, dans les Séminaires, dans les Académies; vous ne verrez pas autre chose. Etudier, c'est apprendre ce que les maîtres enseignent: les examens font foi qu'on l'a bien appris, fidelement retenu; c'en est assez pour être Licencié, pour devenir un Docteur digne d'entrer dans le docte Corps, & capable d'en produire un jour d'autres qui lui ressemblent. Triste succession d'erreurs, de préjugés, d'inconséquences, de procédés purement machinaux! En vain cependant se présenteroit-on pour y mettre quelque obstacle, pour y introduire quelque réforme. On seroit rembarré comme un téméraire Novateur, honni comme un fou à lier.

Laissons donc pêtrir & repêtrir ce pauvre entendement, avec la seule & foible espérance que, quand cette belle éducation sera finie, il sera encore tems d'inviter celui qui l'a reçue, à en recommencer une autre où de passif il deviendra actif, où il arrachera toute l'yvraie qu'on a semée dans le champ pour n'y mettre que du bon grain. C'est ainsi que Descartes, par la force de son puissant génie, vit qu'il falloit douter de tout avant que de savoir quelque chose. Mais y a-t-il beaucoup de Descartes? Je ne sai si tous les siecles en ont jamais enfanté plus d'un; &, ô foiblesse de l'humanité! Descartes n'ouvrit la

grande route du vrai que pour aller ensuite s'égarer dans les sentiers de l'erreur les plus tortueux. On attendroit donc en vain qu'immédiatement au sortir des années de l'éducation, l'idée, le désir & la force de rectifier ce qu'elle peut avoir eu de défectueux, se trouvent dans un jeune homme, à qui, pour l'ordinaire, arrivent l'une ou l'autre de ces deux choses: ou il croit avoir été bien élevé & il acquiesce tranquillement à son état, il y adhere même fortement: ou bien il est las, excédé de tout ce qu'il lui en a coûté pour mettre dans sa tête des choses qu'il entrevoit bien n'avoir pas valu la peine d'y entrer; mais il n'en résulte qu'un dégoût, un dépit, une résolution qu'il prend & qu'il ne tient que trop bien, d'abjurer pour toujours des études qui ne sont qu'une maussade pédanterie, ou une vaine recherche de vérités ensévelies au fond d'un puits d'où personne ne les tirera jamais.

Avec cela qui ne connoit la jeunesse? Faut-il rappeller ici l'énergique description qu'Horace, & après lui Boileau, en ont faite. Ce jeune homme est libre, je le veux, c'est à-dire, qu'il n'est plus dans cette dépendance qui l'obligeoit d'écouter ses maîtres pendant des heures entieres, & d'en recevoir des tâches qu'il étoit obligé d'exécuter. Rien n'égale la joie qu'il ressent d'être débarrassé de ce joug. Mais c'est par cela même que vous serez fort mal reçu si vous l'invitez à entrer dans une autre carriere plus pénible, à entreprendre un nouveau travail plus difficile, puisqu'il s'agira d'arracher avant que de planter. Vous le ferez frémir à l'ouie de cette proposition: il vous fuira comme le plus fâcheux de tous les importuns.

Il est libre, ce jeune homme, ai-je dit: mais, quoi! n'a-t-il pas échangé ses maîtres contre des tyrans? Les passions ne se manifestent-elles pas? Ne prennent-elles pas le plus rapide accroissement? Ne vont-elles pas, comme des coursiers fougueux, l'entraîner à travers champs jusqu'au bord des précipices les plus redoutables, dont il n'échapera que par miracle? Et c'est alors que vous élevez votre voix pour crier: Jeune homme, prens & lis! Jeune homme, pense & réfléchis! Jeune homme, cultive ton entendement! Vous parlez encore: déjà le tourbillon où il vit, l'a emporté; il a disparu.

Voilà

Voilà donc le second âge, le second période de la vie, encore perdu pour la culture de l'entendement. Il faut laisser passer ce bouillon, écouler ce torrent. Attendons: à la fin nous y viendrons. Quand les passions auront pris fin, ou du moins quand elles se calmeront, la raison parlera, la vérité fera valoir ses droits. Des désirs insatiables, qui n'ont jamais été satisfaits, porteront vers ces nouveaux objets dans l'attente d'y trouver ce que les objets sensibles n'ont pu procurer. Cette espérance me paroit fort douteuse. Les grandes passions peuvent perdre de leur force, mais elles ne cessent pas pour cela: la fougue du torrent est rallentie, mais l'eau du fleuve coule encore dans son lit, & vous ressemblez au paysan idiot d'Horace, si vous attendez sur le bord du rivage, que le dernier flot ait passé. Le vase encore neuf a été imbu de la liqueur; quand même elle en seroit sortie, l'odeur y restera longtems, & peut-être toujours.

Je ne vois donc pas qu'on puisse se promettre avec beaucoup de vraisemblance qu'un jeune homme dont les passions ne sont suspendues que parce qu'elles l'ont jetté dans l'épuisement, & après tout ne sont que suspendues, ait des dispositions prochaines & favorables à s'appliquer au genre de travail, (ne dissimulons rien,) qui coûte le plus & qui plaît le moins. Non, les âges suivans ont leurs objets & leurs occupations, leurs amusemens mêmes & leurs hochets, que le gros des hommes préferera toujours à un recueillement, à une contention d'esprit, à une continuité d'efforts qui paroissent faits en pure perte. Allez donc, allez toujours à la poursuite de celui dont vous voulez tenter la conversion philosophique, si je puis m'exprimer ainsi; mettez-vous hors d'haleine à courir après lui, en criant: Je vous offre la science, les trésors de l'ame, l'empire sur vous-même, le vrai bien, le souverain bien. De pareilles offres ne lui feront pas tourner la tête. Ce sera le cas d'Apollon & de Daphné.

Oserois-je lever ici le coin d'un voile qui recele un dédale bien obscur. L'homme est-il effectivement libre, au moins dans la plûpart des sens qu'on attache à ce terme? Qu'est-ce que la liberté? Quand

Quand & comment en faisons-nous usage? On a coutume d'en appeller au sentiment intérieur; mais son témoignage ressemble à celui qu'on croit qu'il rend par rapport à l'influence réciproque du corps sur l'ame & de l'ame sur le corps. On fait une chose parce qu'on veut la faire; rien de plus vrai: on pense qu'on pourroit en vouloir & conséquemment en faire une autre; rien, sinon de plus faux, au moins de plus mal prouvé. Un raisonnement bien simple suffit ici. Pour faire une chose censée libre, il faut la vouloir: pour la vouloir, il faut y avoir pensé: pour y avoir pensé, il faut qu'un acte de l'imagination l'ait présentée à l'esprit. En cet acte, qu'est-ce qui le produit? Est-ce une autre volonté antérieure? Mais d'où seroit-elle venue? Ce seroit toujours à recommencer, & le cercle ne finiroit point.

Suivant cela, (& de grands Philosophes, je dis plus, des Philosophes très estimables, vertueux & religieux, l'ont pensé & ne l'ont pas dissimulé,) il n'y a qu'heur & malheur dans le monde. On a des lumières & de la sagesse, des vertus & de la bonté morale, comme on est beau, bien fait, sain, agile & robuste; c'est à dire, parce que la Nature a fait présent de ces précieuses qualités, & que des circonstances propices, (passez-moi cette expression,) ont développé, façonné & parachevé ces dons naturels. Félicitons donc l'homme de bien & plaignons le méchant. Mais nos devoirs, (car il y en a jusques dans l'hypothese du fatalisme,) nos devoirs s'étendent plus loin. Dès-là que nous savons comment on fait les honnêtes gens, comment on corrige les vicieux, consacrons-y nos soins & notre application. Par là nous serons d'excellens citoyens, nous deviendrons des Dieux en terre. Que cette image se présente à notre esprit, qu'elle nous plaise, qu'elle se reproduise souvent: c'est là la marque la plus certaine que notre entendement est bien cultivé & que nous sommes propres à cultiver celui des autres, à les exciter, à les instruire, à les rendre capables de vaquer eux-mêmes à cette culture.

Je ne connois pas d'autre point de vue de l'objet que j'offre à votre considération. Tout se fait par des motifs, c'est le premier

de

de tous les axiomes, il embrasse également le principe de contradiction & celui de la raison suffisante: car ce qui se feroit sans motif, non seulement feroit destitué de raison, mais se feroit & ne se feroit pas en même tems. L'ignorance des motifs, ou l'absence des idées déterminantes, ôte tout pouvoir d'agir. Ainsi les Hurons & les Topinamboux ne sauroient conformer leurs actions aux devoirs sur lesquels Ciceron a donné un excellent Traité; mais les Romains, en lisant ce Traité, ont pu dire: Voilà qui est vrai, voilà qui est utile; je m'en souviendrai dans l'occasion, j'agirai en conséquence. La vertu, la morale, sont dans le cas de la doctrine, de la science: on les apprend, on les comprend, on les pratique. Cela étant une fois fait, on seroit toujours éclairé & vertueux, comme une montre bien construite & bien réglée continue d'aller avec justesse: mais les impressions reçues peuvent être effacées; les motifs actuellement présens peuvent disparoître & céder à la force des motifs contraires. Ces divers états de l'ame sont trop connus pour que je m'arrête à en donner l'exposé & la preuve. Aujourd'hui dans un casque & demain dans un froc. Aujourd'hui vertueux & demain vicieux. Aujourd'hui libertin & demain dévot. Que signifient toutes ces alternatives & ces vicissitudes, sinon que l'entendement est le théatre où des motifs de toute espece, comme autant d'acteurs, entrent & sortent d'un moment à l'autre, agissent successivement, différemment, contrairement. Ainsi se passe la vie: on la finit sans être bien connu des autres: & comment l'auroit-on été puisqu'on ne s'est pas connu soi-même?

Mais n'avons-nous point perdu le fil de la matiere que nous traitons? Y a-t-il, après tout ce que nous venons de dire, une culture possible de l'entendement? Où la placer? Quelle efficace lui attribuer? Ne craignons rien. Tant s'en faut que cette théorie des motifs irrésistibles détruise la nécessité & la possibilité de cultiver l'entendement, ou même lui porte la moindre atteinte, qu'elle la rend plus facile, qu'elle en découvre mieux l'importance, qu'elle en étend plus loin les effets. S'il s'agissoit de gouverner des êtres qui se déterminassent sans motifs, ou contre les motifs prépondérans, ce seroit ma-

cer sur le sable du rivage des caracteres que le premier flot viendroit emporter. Mais non; dès qu'on connoit les regles les plus avantageuses pour la conduite des hommes, les moyens les plus assurés pour leur bonheur, il n'y a qu'à les faire appercevoir aux autres avec la même évidence & sentir avec la même force qu'on les apperçoit & qu'on les sent: ce travail n'est jamais vain; c'est graver sur le marbre & sur l'airain l'empreinte la plus ineffaçable.

Qu'a-t-il fallu originairement au genre humain? Un premier Sage au moins, comme il a fallu allumer un premier feu, duquel tous les autres ont pû se propager. Or c'est là précisément l'histoire du Monde, de cette Terre. Toutes les sociétés ont été formées & policées par des Sages, à la vérité plus ou moins dignes de ce nom; mais toujours par des hommes supérieurs qui ont connu les motifs à l'ordre politique, aux liaisons sociales, aux offices mutuels, & ont sû les présenter d'une maniere persuasive. Tels ont été les Orphées & les Amphions, les Lycurgues & les Solons. Dans la suite tous les Etats ont possédé de semblables Sages dans un nombre suffisant pour les gouverner, les défendre, & y exercer cette autorité qui, en récompensant & en punissant, acheve de déterminer les hommes par les motifs qui ont le plus de prise sur eux. Les bons gouvernemens sont les vraies écoles de la culture de l'entendement, parce qu'ils réunissent toutes les impulsions propres à faire estimer & rechercher les connoissances solides & les vertus pures. Un Sage couronné est l'ame de toutes les ames soumises à sa domination; il parle & l'on est instruit; il ordonne & l'on est convaincu; il est la loi vivante parce qu'il est la sagesse personifiée, la vertu incarnée: en donnant le plus grand des exemples il fournit le plus puissant des motifs.

Qu'y a-t-il de mieux à faire pour arriver au même but dans ces petites sociétés qu'on nomme familles? Quel est le lot & l'office des simples particuliers? C'est d'exécuter en petit ce que nous venons de voir en grand dans les Etats. Toute famille a besoin d'un Sage au moins, je veux dire, d'une personne qui joigne à l'autorité la capacité,

les

les bonnes intentions & les soins assidus. Quand ce Sage manque, il en est comme d'un vaisseau sans gouvernail: il est le jouet des vents & va se briser contre les écueils. Tous les enfans donc qui naissent & sont élevés dans des maisons où il n'y a ni ordre, ni décence, où tous les principes de conduite sont ignorés ou négligés, ne peuvent que devenir agrestes, ou vicieux. Il n'importe de quelle condition on soit & dans quel séjour on vive, dès qu'on vit avec des gens qui, pour m'exprimer ainsi, n'ont ni tête, ni coeur. L'entendement est également étouffé ou perverti dans les Cours par la frivolité & la dissipation, dans les villes par de petites tracasseries & de vils intérêts, dans les campagnes par cette rusticité qui réunit pour l'ordinaire une grossiéreté indélébile & une malice occulte. On apprend partout quelque chose; car le mal s'apprend comme le bien: mais où apprend-on à penser & à penser juste, à vivre & à converser avec soi-même, à sentir la dignité de son ame, & à lui accorder en conséquence l'attention & les soins qu'elle mérite? Quoi qu'on fasse d'ailleurs, on ne devient pourtant homme que de cette maniere. Je ne sai si c'est là l'homme que Diogene cherchoit avec une lanterne en plein midi, mais je ne le crois pas plus facile à trouver aujourd'hui que de son tems.

N'exagérons pourtant rien; il y a des gens sages & sensés, honnêtes & vertueux, quoique dans des degrés qui ont une grande latitude, & avec des nuances qui varient à l'infini. Quand ces gens-là ont quelque part aux éducations tant publiques que particulieres, ils ont une influence plus ou moins grande sur le développement des facultés intellectuelles de ceux qui leur sont subordonnés. Ne pensez-vous pas qu'un Rollin à la tête de l'Université de Paris, un Daguesseau, non au timon de l'Etat, mais exilé à Fresne & dans le sein de sa famille, & ainsi de tout autre maître, de tout autre pere, qui savent & veulent diriger leurs enfans & leurs éleves, ont fait & font à l'Etat le plus précieux de tous les présens, celui de bons citoyens qui n'auroient pas existé dans d'autres circonstances & à d'autres écoles. Généralement parlant, & d'après une expé-

rience sur laquelle je crois pouvoir faire fonds, il n'y a rien de plus essentiel dans l'éducation des enfans que de les faire vivre & converser avec des personnes raisonnables, pourvu que ces personnes ayent d'ailleurs les qualités propres à s'en faire aimer. J'ai constamment remarqué que les enfans préféroient ce commerce à celui de leurs camarades, où ils n'apprennent qu'à être volages; & c'est l'unique moyen de les préserver de celui des domestiques par lesquels ils sont infectés de bonne heure des vices les plus grossiers. Rien de plus agréable que de voir un enfant qui, sans être raisonneur, autre écueil qui a ses dangers, & de très grands, devient raisonnable, parle suivant sa portée des choses dont on s'entretient devant lui, & auxquelles on lui permet de prendre part, hazarde ses idées & ses jugemens avec modestie, écoute les avis qu'on lui donne & en profite. C'est là, selon moi, le grand secret de l'éducation. Des parens judicieux, & qui n'ont pour leurs enfans que cette affection raisonnable dont on ne sauroit passer les bornes sans tout gâter, leur font faire plus de chemin par une année de conversations instructives, mais familieres, qu'ils n'en feroient par dix années de leçons gênantes & d'endoctrinement perpétuel.

Voilà la tâche des personnes préposées à l'éducation. Il reste à dire un mot de celle des particuliers. Si les choses étoient dans l'ordre, chacun instruiroit & éclaireroit son prochain dans toutes les occasions où il peut le faire. Mais de tous les secours que les hommes s'accordent les uns aux autres, celui-là est le moins commun & le plus mal administré. Il y en a une double cause. Peu de gens savent donner des instructions, des avis: moins de gens encore veulent en recevoir. Ainsi chacun abonde en son sens, & tout va comme il peut. On s'amuse des écarts du prochain: tout au plus en a-t-on quelquefois pitié; mais de là aux bons offices, sur-tout à ceux dont il est question ici, il y a une distance que l'on ne franchit presque jamais. Qu'y a-t-il de plus commun, par exemple, que de voir de jeunes & riches héritiers, qui, devenus possesseurs d'un bien considérable, dépensent avec une prodigalité folle,

se

se livrent à un faste si puérile, à une dissipation si insensée, qu'il semble y avoir une véritable aliénation d'esprit dans leur fait? N'existeroit-il donc personne qui puisse & veuille prendre sur soi, de leur montrer qu'en se couvrant de ridicule & d'opprobre, ils courent à grands pas droit au précipice d'une misere où ils croupiront pendant le reste de leur vie, dont tous les instans seront accablans pour eux? Ces prodigues ont assurément l'entendement foible ou malade; mais leur cure est-elle désespérée? N'y a-t-il aucun moyen de leur fortifier le jugement, ou de les guérir de leurs fougues? Les inconvéniens qui résulteroient quelquefois de la maniere dont ils repousseroient les remedes salutaires qui leur seroient offerts, ne sont pas à comparer avec la joie vive, la satisfaction inexprimable, qu'on ressentiroit en les voyant écouter la voix de la raison & rentrer dans le bon chemin.

On dira peut être que la lecture des bons livres, des traités de morale, de ces ouvrages où les caracteres & les moeurs du siecle sont peints avec énergie, doit produire cet effet & qu'il faut s'en reposer sur elle. Mais qui est-ce qui lit ces Ouvrages, ou du moins qui est-ce qui les lit dans le tems opportun? Est-ce sur la toilette d'un petit-maître ou d'une coquette que vous trouverez La Bruyere & Nicole? Non: ou ils ne lisent point, ou ils s'amusent de ces productions éphémeres qui sont aussi propres à gâter la raison que le goût, l'esprit que le coeur.

D'ailleurs, s'il m'est permis de le dire, je ne crois pas que la lecture des ouvrages les plus distingués mene par elle même fort loin. On lit ce qu'on n'entend point, & quand on l'entendroit, tout aboutiroit à confier à la mémoire des idées qui ne s'élevent pas jusqu'à la région du jugement, ou qui ne pénetrent pas jusqu'à celle du sentiment. Depuis plus de trente ans que j'enseigne la Philosophie, j'ai entendu recommander à mes disciples par des gens qui croyoient prononcer des Oracles: Lisez Malebranche, lisez Locke, lisez Leibnitz. J'avoue que j'ai toujours dit: Ne les lisez point;

 car

car; ou vous ne les comprendrez pas & c'est du tems perdu; ou vous vous y enfoncerez de maniere à vous faire tourner la tête & à la remplir d'une doctrine qui sera plutôt un fardeau qu'un fanal. Il pourra venir un tems, mais ce tems ne vient que pour un très petit nombre de sujets, où, partant de principes supérieurs à ceux de ces grands hommes, possédant cet esprit philosophique, qui est la pierre philosophale réservée aux Adeptes, vous discernerez dans ces Ouvrages fameux le vrai du faux, le certain de l'incertain, vous ferez choix dans toutes ces idées & dans toutes ces assertions de celles qui peuvent grossir le trésor de la vérité, servir également de base inébranlable à vos raisonnemens & à vos actions.

Ah! qu'il en coûte de faire un Philosophe! Et bien plus encore de faire un Sage! Et qui suis-je pour l'entreprendre! Qu'avez-vous pensé tandis que je parlois? Que direz-vous après que j'aurai fini? Ai-je mérité votre attention, ou puis-je du moins espérer votre indulgence?



SUR

SUR
DEUX PROPRIÉTÉS DES CORPS,
QUI SEMBLENT INCOMPATIBLES;
L'INERTIE ET LA *TENDANCE AU CHANGEMENT D'ETAT.*

PAR Mr. BEGUELIN (*).

L'*inertie*, cette répugnance que l'on a obſervée dans la matiere à ſe prêter au changement d'état, eſt une loi de la nature ſi bien conſtatée, qu'elle eſt devenue à bon droit la baſe de la Méchanique. Les Géometres & les Philoſophes ſont également d'accord ſur l'exiſtence de cette loi; s'il y a encore quelque diverſité de ſentiment à ce ſujet, elle ne concerne point le fait, on ne diſpute plus que ſur la ſource de l'inertie; les uns la cherchent dans l'eſſence même de la matiere, d'autres dans une volonté arbitraire du Créateur; & *Leibnitz* prenant un juſte milieu la trouve dans les loix de l'ordre & de la perfection.

Mais ce grand homme, en ſuivant le fil de ſes idées métaphyſiques, étoit parvenu à découvrir dans les corps une propriété peu compatible avec leur inertie, c'eſt un effort continuel pour changer d'état; une force propre & inhérente au corps même, ſource de toutes ſes modifications, qui agit ſans relâche, & qui produit tous les phénomenes du monde matériel. Rien ne reſſemble ſans doute mieux à une contradiction manifeſte, que d'admettre en même tems, dans un

(*) Lû le 16 Mars 1769.

un même corps, deux tendances si visiblement opposées, l'une qui le sollicite constamment à conserver son état, l'autre qui l'excite sans cesse à quitter cet état pour en prendre un autre.

Un Géometre du premier ordre a été si frappé de ce paradoxe révoltant, que c'est principalement à l'absurdité qu'il y trouvoit, qu'il faut attribuer l'éloignement & même l'espece de mépris qu'il a souvent marqué pour la Philosophie, & surtout pour la Cosmologie Wolfienne. Si cet homme célébre, qui a fait pendant tant d'années l'ornement de notre Académie, & qui sera toujours l'objet de notre admiration & de nos regrets, n'étoit que le premier des Analystes, on ne seroit pas surpris qu'il fît peu de cas des spéculations philosophiques; mais il a montré dans plus d'une recherche la profondeur d'un génie également capable de percer dans les ténebres les plus obscures de la Métaphysique, & de s'ouvrir les routes les plus inaccessibles de l'Analyse. J'ose même dire que c'est beaucoup plus encore à la sagácité de son esprit philosophique, qu'à sa supériorité dans le calcul, que nous devons les importantes découvertes dont il a enrichi nos Mémoires & la Géométrie. La plus grande force dans l'art de résoudre des équations compliquées ne fera jamais découvrir une vérité bien intéressante, si la Métaphysique n'a pas déterminé d'avance par les discussions les plus délicates toutes les conditions du probleme.

Personne n'eût donc été plus capable que Mr. *Euler* de concilier les idées de *Leibnitz* sur les forces des corps, s'il eût voulu s'en donner la peine; mais, puisqu'il les a jugées incompatibles, il sera d'autant plus nécessaire de lever la contradiction qu'il a crû y remarquer, que l'autorité d'un si grand homme pourroit facilement servir d'appui aux détracteurs de la Philosophie spéculative, & en imposer à ceux qui ne connoissent qu'imparfaitement combien l'Allemagne, en produisant *Leibnitz* & *Wolf* a contribué au progrès des connoissances humaines.

Il y auroit ici un double objet à embrasser. L'un seroit de montrer que, dans les principes de *Leibnitz*, l'inertie de la matiere,

n'a

n'a rien d'incompatible avec la force active qu'il attribue au corps. L'autre seroit de prouver que ces deux tendances existent en effet dans la nature. Mais, pour lever la contradiction qu'on a reprochée à *Leibnitz*, il suffit de satisfaire au premier point. Je ne toucherai à l'autre qu'autant que la connexion des objets l'exige.

Il est connu que, suivant le systeme de *Leibnitz*, ce qu'il y a de réel, de substantiel dans les corps, se réduit aux élémens simples qui en sont les principes: Que chacun de ces élémens est doué d'une force active qui le distingue de tous les autres, & qui varie à chaque instant l'état de cet élément: Quoique dans la précision métaphysique on ne puisse pas dire que ces élémens agissent réellement les uns sur les autres, l'effet sensible ou physique de leur action n'en répond pas moins exactement à ce que nous nommerions une *action au dehors*. Ainsi, quant au monde matériel & aux perceptions sensibles que nous en avons, c'est comme si les premiers élémens des corps étoient doués d'une force physique au moyen de laquelle ils opérassent, & souffrissent réellement une action & une réaction mutuelle, analogue à celle qu'on observe dans les corps visibles & palpables.

Chaque corps n'étant donc dans ce systême que l'assemblage, ou le résultat d'une combinaison de ces forces élémentaires, il en suit évidemment que tout corps doit renfermer en soi une force active, qui non seulement tende sans cesse à changer son état, mais qui encore y produise à chaque instant un changement quelconque. Jusqu'ici tout est lié dans le systême de *Leibnitz*; & s'il n'est pas celui de la Nature, il est du moins très propre à satisfaire les esprits philosophiques, par sa simplicité & sa fécondité: Deux caracteres qui distinguent presque toujours la vérité de l'illusion.

Mais il reste à concilier cette force active des corps avec leur inertie, & la chose n'est rien moins qu'impossible. Un corps quelconque, grand ou petit, est considéré comme un tout qui existe indépendamment des autres corps qui l'environnent. Dans ce sens il n'est

 pas

pas simplement une multitude d'élémens, cela n'en feroit qu'une portion de l'étendue matérielle qui embrasse le monde entier, mais il est de plus une combinaison particuliere d'un certain nombre d'élémens plus intimément unis entr'eux qu'avec tout le reste de l'univers. C'est cette liaison individuelle, & peut-être même indissoluble dans les premiers corpuscules élémentaires, qui constitue l'individualité de chaque corps total. Il faut donc regarder la moindre masse de matiere, comme on envisage en Dynamique un système de plusieurs grands corps liés entr'eux d'une maniere quelconque; & tout ce qu'on démontre dans cette science par rapport au centre commun de gravité de ces corps combinés, sera également applicable à chaque particule de matiere considérée comme un système d'élémens simples; puisque les forces élémentaires, ainsi que nous venons de l'observer, produisent quant à l'apparence physique le même effet que celui qui résulteroit du concours d'action de plusieurs puissances qui agissent ensemble. Or il est démontré en Méchanique que l'état de mouvement déterminé, ou de repos, du centre de gravité de plusieurs corps ne change point par l'action mutuelle de ces corps entr'eux; la force particuliere de chaque corps, ou l'aggrégé des forces qui en résulte, n'est donc point incompatible avec l'inertie du système total. Et l'on ne sauroit contester cette inertie au système entier, puisque l'*inertie* n'est que la persévérance dans l'état actuel de repos ou de mouvement déterminé, aussi longtems qu'une cause étrangere n'y produit aucun changement. Nous pouvons donc conclure aussi que la force active quelconque d'un corps, résultante des forces élémentaires de ce corps, bien loin d'être incompatible avec l'inertie qu'on a découverte dans la matiere, est elle-même la véritable source de cette inertie. En effet, si de plusieurs corps considérés ensemble aucun n'étoit doué d'aucune force active, il n'y auroit entr'eux aucune action mutuelle, ils ne formeroient par conséquent point d'unité, point de tout; & le systeme n'existant pas, aussi peu que son centre de gravité, il seroit absurde d'assigner la propriété d'*inertie*, ou la permanence dans l'état actuel, à ce qui n'existeroit même point. Mais douez chacun de ces corps

d'une force active, ſuppoſez-les agir entr'eux, il ſe formera un centre commun de maſſe, il réſultera un ſyſteme de forces combinées; celles qui ſeront conſpirantes feront avancer le centre de gravité d'un mouvement uniforme, ſuivant la direction ou moyenne ou commune. Celles qui ſeront oppoſées & égales entretiendront le centre commun dans un état de repos permanent, & les forces oppoſées inégales donneront à ce centre une vîteſſe & une direction conformes à l'excédent des forces ſupérieures ſur les forces détruites. Dans tous les cas l'*inertie* du ſyſtème entier réſultera des forces actives de toutes les parties qui le conſtituent. Par la même raiſon l'inertie du plus petit atome de matiere peut réſulter du concours ou du conflit apparent des forces élémentaires dont cet atome repréſente confuſément à nos ſens la combinaiſon; ou, ce qui revient au même, cet atome matériel n'étant que l'expreſſion obſcure & ſenſible d'un ſyſtème d'élémens ſimples, l'inertie de cet atome eſt analogue à celle du centre de gravité d'un nombre quelconque de grands corps qui agiſſent entr'eux: & par conſéquent, dans les deux cas, cette inertie tire ſa ſource des forces dont chaque puiſſance qui concourt à former le ſyſtème eſt animée.

Que l'analyſe des corps conduiſe enfin à des élémens ſimples ou qu'il faille s'arrêter aux atomes matériels, ce n'eſt pas dequoi il s'agit proprement ici. Il me ſuffit d'avoir montré qu'il n'y a point d'abſurdité dans le ſyſtème de *Leibnitz* d'aſſigner à la fois deux tendances oppoſées au corps, l'inertie & l'activité: celle-ci exiſte dans chaque élément; celle là réſulte de leur combinaiſon d'où naît la matiere.

Il ſeroit plus difficile de prouver que ces deux tendances exiſtent effectivement dans le monde des corps. Les faits ſe démontrent beaucoup mieux par l'expérience que par le raiſonnement; & l'expérience n'eſt pas ici d'un grand ſecours. Elle nous inſtruit à la vérité, & de l'inertie des corps, & de leur activité; mais elle ne nous dit pas ſi ces deux propriétés ſont inhérentes au corps même dans lequel on les obſerve, ou ſi elles réſultent de l'action des autres corps ſur celui-là. Il eſt aſſez indifférent en Méchanique de décider ces queſtions; parce

que tout y revient au même, quelque sentiment qu'on embrasse, pourvu qu'on ne s'écarte pas de l'expérience. Mr. Euler, en considérant l'inertie comme une propriété essentielle au corps, & en refusant à ce corps toute force intrinseque, n'en a pas moins donné une excellente théorie du mouvement; l'impénétrabilité d'un corps combinée avec l'inertie de l'autre fournit à ce grand Géometre toutes les forces requises pour satisfaire aux changemens que l'état actuel de la nature éprouve à chaque instant. Mais, si dans l'hypothese précisément opposée la force active est essentielle aux élémens du corps, que de la combinaison de ces forces élémentaires résulte l'inertie de la matiere & son impénétrabilité, on en déduira également les principes de la Méchanique, & les phénomenes de la nature. Dans cette derniere hypothese on a même l'avantage de n'être pas réduit à douer l'impénétrabilité d'une force indéterminée, dont les degrés s'étendent depuis le zéro jusqu'à l'infini, qui s'exerce avec une espece d'intelligence & de calcul, & qui ne se déploye que précisément autant que le besoin l'exige. Mais, d'un autre côté, l'*inertie* considérée comme un simple équilibre de forces opposées, ne semble pas épuiser l'idée de l'inertie qu'on observe dans la nature. Le centre de gravité d'un système de plusieurs puissances qui agissent entr'elles, persévere il est vrai dans son état actuel de repos ou de mouvement déterminé, aussi longtems qu'aucune cause étrangere à ce système n'y produit de changement; jusques-là l'inertie est bien telle qu'on la conçoit en Dynamique, mais il semble que la moindre force suffiroit pour vaincre cette inertie: ce qui n'est pas vrai dans la nature, où la résistance de chaque corps total est proportionnée à la somme des inerties particulieres de tous les corpuscules qui le composent. Quand deux forces se font équilibre, une troisieme qui agit dans une direction conspirante avec l'une des deux premieres, ne doit éprouver, semble-t-il, aucune résistance de la part de ces deux premieres; il ne paroit pas qu'elles ayent quelque inertie à lui opposer, & la moindre force devroit suffire pour mouvoir les deux plus énormes masses. Mais c'est précisément cette considération qui fait comprendre que la loi d'inertie est de vérité contingente, & qu'elle ne résulte

fulte pas nécessairement de l'essence des corps. Un système quelconque de puissances qu'on conçoit agir entr'elles, persévere dans son état de repos ou de mouvement déterminé, aussi longtems que rien ne l'oblige à en changer, de même que deux poids égaux retiennent les bras d'une balance dans la situation horizontale. Or, si l'on fait abstraction de tout frottement, il est certain que le moindre effort, la plus légere pression, un simple attouchement, en un mot toute cause étrangere dont l'action ou le mouvement sera aussi petit que l'on voudra, peut déranger cet équilibre, quelle que soit la masse des poids, pourvû que l'effort quelconque soit dirigé, non sur le point d'appui de la balance, mais sur l'un des bras seul, à quelque distance que ce soit du point d'appui. Il est évident que toute action doit produire ce dérangement; & il ne paroit pas absolument impossible qu'une moindre force donne à ces poids un mouvement aussi considérable que celui qu'une plus grande force auroit produit; une petite étincelle peut faire fauter une mine aussi haut que l'auroit pû faire la flamme d'un bucher: le même effort appliqué sur le même point de la balance en dérange également l'équilibre quand même on concevra que les poids augmentent successivement à l'infini; en laissant les poids invariables & la puissance constante, le dérangement d'équilibre doit encore subsister, quand même la distance de la puissance au point d'appui sera diminuée, & cette distance peut aussi diminuer à l'infini. Mais, pour qu'il regne un ordre constant dans la nature, pour qu'il y ait une vérité déterminée dans la suite des évenemens, la Raison supreme vouloit qu'il y eût une proportion entre les causes & les effets, que tous les degrés de mouvement ne résultassent pas d'une impulsion quelconque; qu'un atôme de poussiere tombant sur un bras de la balance à un pouce de distance du point d'appui, ne donnât pas à deux poids de cent livres chacun une secousse égale à celle qu'ils recevroient de la chûte d'une bombe qui tomberoit sur ce même bras, à deux pieds de son appui.

On ne découvre à la vérité, ni dans l'équilibre des deux poids, ni dans le centre de gravité d'un système de forces, aucune résistance proprement dite qui s'oppose au changement d'état; aussi n'y avoit-

 il

il point de néceſſité abſolue d'établir la loi d'inertie dans la nature; mais il ſuffit que, ni l'état d'équilibre, ni celui d'un centre de gravité, ne ſauroit changer ſans qu'il y ait une raiſon de ce changement; il ſuffit que cette raiſon ſoit contenue dans l'action de quelque cauſe extérieure, pour admettre ici un certain degré d'inertie, auſſi petit qu'on voudra le ſuppoſer. Car, dès qu'il s'agit d'opérer un changement d'état, il faut que la cauſe étrangere qui le produira déploie une force, puisqu'on appelle *force* ce qui produit un changement d'état. Mais, s'il y avoit un ſeul cas dans la nature où l'action d'une force n'éprouvât point de réaction, les changemens qui arrivent dans l'univers ne ſeroient plus aſſujettis à aucune regle. Un effort nul à la rigueur, produiroit tel mouvement qu'on voudroit imaginer; & les événemens n'auroient plus de raiſon préciſe de leur détermination. Il faut donc admettre dans chaque ſyſtème de puiſſances, une rénitence à l'effort extérieur qui tend à changer l'état actuel de ſon centre de gravité. Cette rénitence ſera, ſi l'on veut, infiniment petite dans un ſyſtème de forces élémentaires; pourvû qu'on conſidere enſuite le moindre corps comme l'aggrégé d'un nombre infiniment grand de pareils ſyſtèmes. Mais, dans l'exactitude philoſophique, ces expreſſions d'infiniment grand & d'infiniment petit, appliquées à des êtres exiſtans, ne ſont qu'une maniere vague d'énoncer des quantités déterminées très grandes ou très petites, dont nous ne connoiſſons pas la valeur préciſe. C'eſt ainſi que la force qui fait tomber les corps près de la ſurface de la terre, nous paroit infiniment petite, quoiqu'elle ait ſans doute une quantité finie bien préciſément déterminée, puisqu'elle excede de beaucoup la force qui fait graviter la lune vers notre globe & que cette derniere force eſt encore bien éloignée d'être la plus petite de celles qu'on connoit dans la nature. Il eſt donc très probable que le ſyſtème le plus ſimple, le moins compliqué, des premiers élémens de la matiere a un degré fini & déterminé de réſiſtance au changement d'état, quoique ce degré, incomparablement plus petit que le moindre de ceux que nos ſens peuvent éprouver, doive être abſolument inſenſible pour nous. Mais le plus petit corpuſcule de matiere que nous

puiſſions

puissions appercevoir, doit déjà être un aggrégé d'un nombre prodigieux de systèmes élémentaires subordonnés & compliqués entr'eux; la somme des inerties propres à chacun d'eux constitue par conséquent l'inertie de ce corpuscule, comme la somme des inerties de plusieurs corpuscules constitue la renitence totale du corps plus volumineux qu'ils composent. On adopte généralement, d'après les observations, que cette résistance au changement d'état est dans les corps tangibles proportionelle à la densité de ces corps, ou à la quantité de matiere qu'ils renferment: pourquoi n'admettroit-on pas que dans les petits corps qui échappent à nos sens cette inertie est aussi proportionelle à la quantité des combinaisons des forces élémentaires? L'analogie, la simplicité qui regne dans cette hypothese, son accord avec tous les principes fondamentaux de la Dynamique, l'avantage qu'elle a de rendre raison des phénomenes les plus inexplicables de la nature, je veux dire le mouvement & la gravitation, sont des argumens bien plausibles en sa faveur. *Leibnitz* assuroit que son système étoit susceptible d'une démonstration rigoureuse, & il connoissoit très bien la force de ce terme; mais il savoit aussi qu'en Métaphysique les démonstrations ne suffisent pas pour convaincre tous les esprits. Elles ne peuvent pas être vérifiées comme un calcul d'Arithmétique; & ceux qui sur le simple exposé d'un système métaphysique bien lié, n'éprouvent pas déjà le sentiment d'une espéce de conviction anticipée, se rendront très difficilement à des démonstrations dans lesquelles l'erreur, s'il s'y en glisse, (comme on peut toujours le supposer,) ne sauroit être découverte par une nouvelle opération. Quel est le Géometre qui, dans le développement d'une formule un peu compliquée, voulût s'en fier entierement au résultat d'un premier calcul, s'il n'y avoit aucun moyen de reconnoître les méprises? Mais aussi point de Géometre ne se donnera la peine de vérifier un calcul un peu pénible, s'il apperçoit dans le résultat une harmonie frappante avec d'autres calculs analogues à celui-là.

CON-

CONCILIATION
DES IDÉES DE NEWTON ET DE LEIBNITZ
SUR
L'ESPACE ET LE VUIDE.
PAR MR. BEGUELIN (*).

Dans le Mémoire que j'ai eu l'honneur de lire à l'Académie (**), sur la maniere de concilier les sentimens particuliers qu'avoient, par rapport à l'attraction & aux substances simples, les deux grands hommes que je viens de nommer, j'ai insinué qu'il ne seroit peut-être pas difficile de rapprocher encore leurs idées sur les autres points de Physique & de Métaphysique dans lesquels ils paroissent avoir les sentimens les plus directement opposés. Telles sont les questions sur l'*espace* & le *vuide*. L'espace existe-t-il indépendamment des choses créées? Y a-t-il du vuide dans la nature? Newton affirme très positivement l'une & l'autre de ces propositions; Leibnitz les nie absolument. L'opposition ne sauroit être plus formelle. De deux génies de cette force, l'un auroit-il pû être dans l'erreur sur des matieres si peu compliquées; & ne cherchant que la vérité, ne se seroit-il pas rendu aux preuves qui convainquoient l'autre? Car enfin l'un des deux devoit par la nature des choses avoir la vérité de son côté.

On a traité de chimérique & d'impraticable le projet qu'avoit formé Leibnitz de concilier *Platon* & *Aristote*; *Aristote* & *Descartes*; d'ailleurs cette conciliation fût-elle possible, de quelle utilité seroit-elle au progrès des sciences? Qu'importe que deux grands hommes qu'on

(*) Lû le 12 Octobre 1769.

(**) Mém. de l'Acad. Tom. XXII. p. 372.

qu'on croyoit avoir des idées très opposées, ayent eu dans le fond une même opinion? C'est la vérité qu'il s'agit de découvrir, & non les sentimens de tels ou tels Philosophes. Leur conformité ne rendra pas une proposition plus vraie; & leur opposition n'empêchera pas que les choses n'ayent leur vérité déterminée, quelle que soit notre indécision.

En accordant à ces réflexions toute la justesse qu'elles renferment, je crois néanmoins qu'il ne sauroit être qu'avantageux au progrès des sciences de rechercher les causes de la diversité de sentimens que les grands hommes, vraiment dignes de ce titre, ont eu sur les mêmes objets, si ces objets sont intéressans par eux mêmes, & que ceux qui s'en sont occupés ayent été à portée de les approfondir. Peu nous importeroit sans doute de concilier deux anciens Philosophes sur des hypotheses de Physique qu'ils n'auroient eu ni l'un ni l'autre les moyens d'établir d'après des expériences bien exactes; nous n'en approcherions pas plus du vrai. Mais, lorsqu'il s'agit de matieres sur lesquelles les hommes de génie de quelque siecle qu'on voudra, doués des lumieres & des secours nécessaires, ont médité profondément, s'il se trouve qu'ils ayent été sur ces objets dans des sentimens opposés, on peut, ce me semble, assez vraisemblablement en conclure, ou qu'ils ont raison tous deux, & que l'opposition n'est qu'apparente; ou que, si elle est réelle, la vérité se manifestera à coup sûr, en pesant la solidité des argumens de part & d'autre.

D'ailleurs, chaque objet peut être envisagé sous diverses faces. Celui qui n'en envisage qu'une, ne sauroit le voir parfaitement, & cela sera cause qu'il ne verra peut-être pas même assez bien le côté qu'il apperçoit. Qui ne verroit un cercle que de profil, n'appercevroit qu'une ligne; & la prendroit pour une simple droite aussi longtems qu'il ne découvriroit pas que ce qu'il voit est la circonférence d'un plan circulaire. C'est le défaut ordinaire des systèmes, de montrer tout d'un seul point de vue; de là vient que les meilleurs esprits, sans adopter les systèmes entiers des plus grands hommes sur les diverses branches de la Philosophie, recueillent ce qui leur semble solidement

dement établi dans les sectes les plus opposées, & enchaînant ensemble les vérités éparses qui paroissoient se fuir mutuellement, se forment, pour ainsi dire, leurs systèmes à eux seuls.

J'ai déjà observé dans mon Mémoire précédent, que Newton envisageoit principalement les objets du côté physique & géométrique, tandis que Leibnitz les considéroit dans leur sens métaphysique. Cela seul a dû produire une diversité très grande dans leur maniere d'appercevoir & de s'énoncer. Il seroit inutile de rapporter ici en détail leurs sentimens sur l'espace & le vuide, & d'énumérer les argumens sur lesquels ils appuyoient leurs décisions; les ouvrages de ces illustres Philosophes sont entre les mains de tout le monde, & ces matieres ont été trop souvent débattues & discutées pour qu'il soit besoin de les répéter.

Qu'un Géometre considere un cube de marbre, il fera abstraction de la matiere, du marbre même, pour ne s'occuper que des propriétés de la figure. Dès-lors ce cube n'est pour lui qu'un espace terminé par six surfaces égales & semblables, perpendiculaires les unes aux autres. L'espace lui-même que ces surfaces renferment devient un tout homogene & immobile, où chaque partie concevable ressemble à toute autre. Un des plans qui composent les surfaces, considéré à son tour séparément, lui présente un espace sans épaisseur, circonscript par quatre lignes droites, égales & verticales les unes aux autres; espace homogene encore, & dont aucune partie n'est distinguée de sa voisine. Enfin les lignes qui bornent ces plans, envisagées séparément, que sont-elles autre chose aux yeux de ce Géometre que des espaces sans largeur ni épaisseur, terminés chacun par deux points indivisibles, qui forment les extrémités de ces lignes. Il est donc fondé à se former de l'espace l'idée de quelque chose de parfaitement homogene; de susceptible de trois dimensions; de divisible à l'infini, & dont la propriété est d'être, pour ainsi dire, le receptacle des corps. Si l'on demande présentement; l'espace conçu sous cette notion est-il un être réel, existe-t-il dans la nature? il est aisé de voir qu'il a la même

réalité

réalité qu'ont les solides, les surfaces, les lignes, & les points géométriques. Ce ne sont assurément, ni des chimeres, ni de purs néants; ils existent dans l'univers avec les corps dans lesquels on les a conçus, & desquels on les a abstraits. Existence aussi réelle que celle des genres & des especes des animaux, des plantes & des métaux, qui ne se trouve que dans leurs individus.

Mais on peut à la suite de cette question en faire une autre plus précise, & plus pressante: l'*espace* tel que nous l'avons conçu peut-il exister séparément des corps? C'est demander en d'autres termes: le *vuide* peut-il exister? Car qu'entend-on par le *vuide*, si ce n'est l'espace pur, qui ne seroit occupé par rien de matériel? Or cette question peut être faite en trois sens différens: Ou l'on demande, si l'espace pur, ou le vuide, est possible absolument parlant, c. à d. si sa notion n'implique pas contradiction? Ou secondement, si en lui accordant cette possibilité absolue, il est encore physiquement possible dans l'univers des corps? & enfin, s'il y existe réellement?

La premiere de ces questions ne partageoit point nos deux Philosophes. *Newton* qui admettoit l'existence actuelle du vuide, ne pouvoit douter de sa possibilité absolue & physique; & *Leibnitz*, en excluant le vuide de l'univers existant, n'y trouvoit cependant rien d'absolument impossible. La notion de l'espace pur ne renferme de contradiction que dans l'idée que les Cartésiens se formoient des corps. Si l'on accorde que la matiere & l'espace sont la même chose, il est évident sans doute que l'espace dénué de matiere seroit une contradiction; mais il auroit fallu prouver la réalité de cette définition de la matiere, avant de s'en servir comme d'un principe de raisonnement; & l'absurdité à laquelle ce principe conduisoit, le rapprochement des quatre murailles d'une chambre dont Dieu auroit anéanti l'air intérieur, sembloit suffire pour rendre la définition suspecte.

Mais, en accordant que l'idée de l'espace pur ne renferme rien d'impossible en soi, il n'est pas encore tout à fait clair que cet espace

pur puisse se trouver dans le monde matériel. La grande divisibilité des corps; l'équilibre des fluides, la petitesse extrême de leurs parties, l'effort continuel que ces particules font pour se rapprocher par une suite de leur pesanteur; tout cela pourroit bien rendre le vuide physiquement impossible dans le monde actuel, & produire au moyen de la pression extérieure sur les murs de la chambre dont l'air seroit anéanti, ce contact des quatre parois, que les Cartésiens faisoient résulter d'une destruction imaginaire de l'étendue.

Il est clair que la question revient ici au calcul des efforts que les fluides peuvent faire d'un côté, & de la résistance qu'ils peuvent rencontrer de l'autre. Quelque grands qu'on puisse concevoir ces efforts, il est incontestable que la force des fluides est déterminée & finie. On peut donc toujours concevoir un degré de résistance supérieur à cette force. Supposons pour un moment que notre cube de marbre soit excavé intérieurement, & qu'aucune matiere ne remplisse ce vuide; donnons à ses six parois des pores assez petits pour que nul fluide ne puisse les pénétrer: il y aura sans doute une certaine épaisseur de ces parois qui sera capable de résister à l'effort de tous les fluides ambians, & il y en aura une moindre qui ne pourra plus empêcher l'écroulement. La question sur la possibilité physique du vuide est donc de la nature des autres questions physiques; c'est à l'expérience & aux faits à la décider. S'il existe actuellement du vuide dans l'univers, sa possibilité physique sera démontrée; s'il n'y en existe point, il restera toujours douteux qu'il y en ait pû avoir.

Reste donc la question de fait, sur laquelle nos deux grands hommes paroissent avoir des sentimens précisément opposés, appuyés de part & d'autre & sur des argumens bien forts, & sur des autorités très respectables. La Physique fournissoit à *Newton* des armes en faveur du vuide, qui dans ses mains devoient être encore plus redoutables qu'elles ne l'avoient été dans celles de *Lucrece* & de *Gassendi*. *Leibnitz* tiroit ses armes de son propre fond, de cette Métaphysique qui lui avoit dévoilé les premiers principes & la liaison des choses. Mais

Mais cette Métaphysique ne dit rien à l'imagination; elle n'est pas à la portée de tout le monde: & eût-elle toute l'évidence de son côté, une preuve palpable & sensible, tirée des faits observés dans la nature, semble devoir l'emporter ici sur toutes les considérations prises de la simple convenance des choses.

Mais les argumens physiques contre le plein absolu sont-ils invincibles? C'est ce que de très habiles Physiciens n'ont pas cru, & ce qu'un des premiers Géometres de nos jours ne pense pas encore. Il n'est pas aisé de comprendre, pour parler avec Despréaux, *comment tout étant plein tout a pû se mouvoir;* cependant à l'aide de certaines suppositions cela se conçoit au moins à l'égard du mouvement circulaire, & si toute la matiere se meut dans un même sens. Il est vrai qu'il n'en est pas tout à fait de même du mouvement circulaire d'un anneau solide, & d'un anneau composé de parties séparées & incohérentes. Cela n'empêcheroit pas néanmoins qu'on ne pût admettre le mouvement de ce dernier dans le plein absolu, aussi bien que de l'autre. Mais, outre que les mouvemens que nous observons dans la nature se font également dans toutes les directions imaginables, c'est qu'ils se font aussi avec des degrés de vîtesse si différens, qu'il est impossible de ne pas admettre avec le plein absolu des frottemens très considérables, & des résistances continuelles. Or, quand il n'y auroit que la marche constante des corps célestes, qui depuis tant de siecles n'a éprouvé aucun rallentissement sensible, on ne sauroit douter que ces frottemens & ces resistances n'existent pas, tels que le plein absolu devroit les produire. On peut, je le sai, calculer en géométrie jusqu'à quel degré on doit diminuer la densité du fluide éthéré pour que sa résistance ne retarde pas sensiblement la marche des globes qui roulent sur nôtre tête. *Newton* lui même avoit déjà trouvé qu'en supposant l'éther sept-cent-mille fois plus élastique, & autant de fois moins dense que notre air, le mouvement des planetes n'en éprouveroit en dix mille ans aucune résistance sensible; & l'illustre Mr. *Euler* a mis la chose hors de tout doute par les profondes recherches qu'il a faites

 sur

ſur cette matiere (*). Mais, quand du géométrique on paſſe au phyſique, & qu'on rentre dans le monde actuel, il ſemble que les difficultés reviennent. Je ne veux pas appuyer ici ſur cette prodigieuſe élaſticité qu'on aſſigne à l'éther, élaſticité qui devroit avoir ſa ſource dans une matiere plus déliée, & plus élaſtique encore, celle-ci dans une autre d'un troiſieme degré ſupérieur, & ainſi de ſuite, ſans qu'on voie aucun jour à finir la gradation; je veux ſimplement m'arrêter ici à l'exceſſive rareté qu'il faut attribuer à la matiere qui remplit le vaſte eſpace des cieux. Si les corps groſſiers que nous connoiſſons different ſenſiblement en denſité, nous en trouvons la cauſe dans le nombre & la grandeur de leurs pores; plus un corps eſt compact, plus il a auſſi de parties peſantes: la matiere étrangere qui paſſe à travers ſes pores, comme l'eau par un crible, n'augmente point ſon poids en augmentant ſon volume. C'eſt ainſi que l'or eſt plus denſe que le plomb, & la pierre ponce moins denſe que le fer. Mais cette denſité rélative ſuppoſe des corps compoſés de parties ſolides, & fortement cohérentes, qui en faſſent de véritables maſſes, plus ou moins criblées en tout ſens. Si la matiere fluide qui paſſe ſans peſer au travers de ces canaux ſolides, eſt elle-même un tiſſu de nouveaux cribles plus étroits, pour une matiere plus déliée encore; celle-ci pour une troiſieme, & ainſi de ſuite; il eſt évident que, bien loin de diminuer la denſité de la matiere fluide en la ſubtiliſant, on l'augmente à chaque nouveau degré de fineſſe qu'on lui aſſigne; & que le dernier degré de ténuité, qu'on ne peut refuſer d'admettre dans un univers compoſé d'individus abſolument déterminés en nombre & en nature, que le dernier degré de ténuité, dis-je, ou la matiere la plus déliée qui exiſte dans le monde, ſera auſſi la plus denſe; & que ſon tiſſu ſerré, ou n'admettra plus d'interſtices, ou n'en aura que d'abſolument vuides. C'eſt d'ailleurs, ce me ſemble, faire un cercle vicieux, que de recourir à une gradation infinie de matiere fluide

(*) Mr. d'Alembert a fait plus encore; il a démontré depuis peu qu'un corps d'une figure donnée peut ſe mouvoir dans un fluide ſans y éprouver une réſiſtance quelconque. C'eſt ce que perſonne que je ſache, n'avoit encore découvert. Voyez les Opuſc. mathémat. Tome V.

fluide, de plus en plus rare & subtile, afin d'établir le plein absolu; & de prouver ensuite l'existence actuelle de cette matiere inconcevable, par le peu de résistance qu'éprouvent les cometes & les planetes dans leurs révolutions. La dégradation de densité peut très bien se concevoir dans la nature, sans recourir toujours aux cribles, & à la matiere interlabante. Il est des forêts épaisses; il en est où les arbres sont fort clair-semés. La moindre densité d'un fluide peut résulter de la configuration de ses particules qui se touchent en un moindre nombre de points; elle peut résulter encore de la distance absolue de ces particules, qui fait qu'elles ne se touchent nulle part. On peut concevoir cette distance très considérable en tout sens; ce seront des corpuscules dispersés çà & là comme les débris du naufrage d'Enée, *Apparent rari nantes in gurgite vasto;* ou plutôt il n'y a qu'à considérer ce qui doit résulter de la gravitation universelle, qu'on ne peut plus se dispenser d'admettre. Qu'est-ce que l'univers physique, si ce n'est un nombre prodigieux de grands globes, placés à des distances déterminées les uns des autres, & circulans dans des orbites prescrites? Chacun de ces globes a probablement, outre le noïau visible, un duvet plus fin qui s'éleve jusqu'à une certaine distance au dessus de ce noïau, qui pese vers lui, & qui tourne avec lui. Mais, comme l'attraction diminue en raison du quarré de la distance au centre, & que la vitesse centrifuge des corps qui tournent sur leur axe, augmente en raison directe de cette même distance, on peut toujours calculer jusqu'à quelle hauteur ce duvet peut s'élever au dessus du noïau, sans l'abandonner pour s'échapper par la tangente. Au delà de cette hauteur, on ne conçoit pas trop comment il pourroit y avoir de la matiere, ni quel effet elle y produiroit. Le vuide absolu peut donc régner de cette hauteur-là jusqu'aux confins de l'atmosphere, ou du duvet des globes les plus voisins, dont la hauteur sera elle-même limitée de la même maniere. Il est naturel que chaque globe ait d'abord attiré à lui de la matiere répandue dans le vaste des cieux la portion la plus à sa portée, qui s'y sera appliquée & serrée par couches concentriques plus ou moins denses, selon la figure des particules, & la force variable de l'attraction.

De

De là a dû résulter un vuide disséminé dans les parties mêmes du globe, & de son atmosphere; vuide très nécessaire pour faciliter le mouvement intérieur des petits corpuscules dans chaque monde particulier, comme le grand vuide des cieux est nécessaire pour faciliter la marche réguliere de ces mondes entr'eux. S'il y avoit eu entre deux globes voisins, entre notre atmosphere, par exemple, & celle de la lune, des particules de matiere placées à la distance convenable pour être également attirées par ces deux corps, elles auroient sans doute été dans le cas de l'âne de Buridan entre les deux prés. Mais la variation continuelle de ces distances, & la pesanteur même de ces particules vers le soleil ne les auroient pas laissé longtems dans cet état d'équilibre. Rien n'empêche donc de concevoir que la matiere est distribuée & placée actuellement par globes isolés, comme les premieres loix de la nature semblent l'exiger; & l'on n'a pas à craindre que l'intervalle vuide qui seroit entre ces mondes ne facilitât leur rapprochement, ou la chûte des uns sur les autres, puisque le mouvement rectiligne qui leur a été imprimé par le Créateur tendroit plutôt à les séparer de plus en plus, si la force de la pesanteur ne les conservoit dans leur distance actuelle.

La plus forte objection physique qu'on puisse opposer à Newton contre l'existence du vuide, est, ce me semble, celle qu'on tire de la nature de la lumiere. Le grand homme que notre Académie a eu longtems la gloire de posséder, & qu'elle conserve encore entre ses plus illustres Membres, Mr. Euler nous a donné sur la lumiere une théorie digne de sa sagacité. La partie géométrique ne souffre point de difficulté, c'est ce qu'on devine aisément; la partie physique n'est pas moins plausible qu'ingénieuse, & le sentiment de Newton y est combattu par des argumens si pressans, qu'il ne paroit presque plus soutenable. La lumiere est, ou une émission réelle du corps lumineux; ou elle n'est que le résultat de la pression de ce corps sur le fluide des cieux. Le systême de l'*émission* réelle est une suite nécessaire de l'existence du vuide. Le systême de la *pression* suppose nécessairement le plein absolu; & c'est peut-être là son unique défaut. Si la

lumiere

lumiere eſt un corps, le vuide eſt prouvé. Si ce n'eſt que l'ondulation de l'éther, tout l'univers eſt plein; & ce dernier ſentiment devient d'autant plus probable, que Mr. Euler montre d'un côté que par l'émiſſion le Soleil ſouffriroit une diminution trop prodigieuſe pour qu'on ne s'en fût pas apperçu depuis cinq à ſix mille ans, & d'un autre côté que cette émiſſion elle même détruiroit le vuide dans l'univers; puisque l'exceſſive quantité de corpuſcules de lumiere répandus partout, rempliroit ſans ceſſe l'eſpace entier qu'on ſuppoſe vuide; n'y ayant aucun point imaginable dans les cieux d'où les objets ne puiſſent être apperçus, & où n'abordent par conſéquent ſans intermiſſion des milliers de rayons lancés de toute part.

J'ignore ce que les Newtoniens répondent à ces deux objections. Elles me paroiſſent inſolubles ſi l'on conçoit la lumiere comme une émanation continuelle, lancée ſans interruption du corps lumineux. Mais 1°. tout le monde convient que la lumiere doit être exceſſivement déliée, puisque malgré la rapidité de ſon mouvement elle ne bleſſe pas les organes délicats de la vue. 2°. Il n'eſt ni probable, ni néceſſaire, qu'elle ſoit lancée ſans interruption du corps lumineux, comme un jet d'eau ſaillit continuellement de ſon réſervoir. Les corps lumineux ſont conçus fluides, & dans une grande agitation. Cette agitation peut être un mouvement alternatif de la circonférence au centre & du centre à la circonférence, une eſpece de combat perpétuel entre les deux forces centrales, qui produiſe un effet analogue à la contraction & à la dilatation du coeur; avec cette différence qu'ici ce ſeroit peut-être la diaſtole qui expulſeroit les rayons lumineux, au lieu que dans le muſcle c'eſt la ſyſtole qui lance le ſang vers les extrémités du corps animé, qu'on a ſi ſouvent comparé au ſyſtème du monde. On ſait enſuite que les impreſſions que la lumiere fait ſur l'oeil s'y conſervent pendant quelque tems; il n'en faut d'autres preuves que ces cercles de feu & ces courbes lumineuſes, que forment un charbon ardent, ou un bâton allumé qu'on agite rapidement. On peut déterminer la durée de ces impreſſions; & Mr. d'Arcy l'a fait actuellement dans un Mémoire lû à l'Académie des Sciences de Paris

au mois d'Avril 1765. Il résulte de ses expériences que l'impression produite par un objet visible dure au moins huit tierces de tems avec une force sensiblement égale. En partant de cette observation, il suffiroit donc de huit vibrations du corps lumineux par secondes, pour que la lumiere parût en émaner sans la moindre interruption. Mais M. Euler a calculé qu'en supposant la parallaxe du soleil de 13 secondes, & le tems qu'il faut à la lumiere pour arriver de cet astre à nous, de 8 minutes, un rayon parcourroit en chaque seconde de tems un espace de plus de six cent quarante sept millions de pieds de Paris. Cet espace sera beaucoup plus grand encore si l'on prend la parallaxe solaire de dix secondes, ou au dessous; mais, à nous en tenir au premier calcul, & en supposant que la matiere de la lumiere soit d'une figure sphérique, il est clair que la distance entre deux globules lancés successivement d'un même point visible pourra être tout au moins de 80 millions de pieds. Or sur cette distance il y auroit donc un espace absolument vuide de treize millions de toises, au bout duquel se trouveroit un espace plein, de la grandeur d'un globule de lumiere; espace suivi d'une nouvelle étendue parfaitement vuide d'autres treize millions de toises, & ainsi de suite. Mais le diametre d'un globule de lumiere ne sauroit être la millionieme partie d'un pié; par conséquent l'intervalle vuide contenu dans la distance d'un point lumineux jusqu'à mon oeil peut être tout au moins à l'espace plein comme le nombre de quatre-vingt billions est à l'unité. Il est donc évident que, quoique les corps lumineux dardent des rayons en tout sens, il peut néanmoins rester un vuide si vaste entre les corps célestes, que la matiere lumineuse qui le traverse ne sera presque rien au prix de l'espace pur; que les planetes & les cometes n'en auront à éprouver aucune résistance, & que la rareté extrême des rayons de lumiere rendra insensible la perturbation que leur prodigieuse rapidité auroit pû produire dans l'arrangement de l'univers.

On conçoit de même qu'en adoptant l'émanation par secousses, la diminution des globes lumineux est encore insensible au bout de plusieurs siecles. Si notre Soleil, par exemple, n'avoit que huit pulsations

tions par secondes, & qu'à chaque émanation son diametre fût raccourci, je ne dis pas d'un cinquante-millieme de ligne, mais cent fois davantage, c. à d. de la cinquante-millieme partie d'un pié, cela ne produiroit qu'un raccourcissement de 14 pieds par jour, ou de cinq mille pieds par an. Ainsi dans l'espace de six mille ans le diametre du Soleil auroit diminué de trente-millions de pieds, ce qui seroit la valeur d'un rayon de la terre & demi, & répondroit à la cent trente troisieme partie du diametre solaire, ou à 14 secondes de son diametre apparent; diminution successive qui seroit assurément restée imperceptible aux observateurs depuis Hipparque jusqu'à nous. Il ne s'agit pas, au reste, ici de déterminer ni la grandeur précise des globules de lumiere, ni le nombre précis des jets que le soleil en darde dans un tems donné, ni la quantité de points d'où ces jets partent. Ces globules doivent être incomparablement plus petits que nous ne les avons supposés. On sait que Mr. Muschenbroek ne leur assigne que la cinq-mille-billionieme partie de l'épaisseur d'un cheveu; ainsi leur nombre à chaque éjaculation peut être conçu prodigieusement grand, sans rien changer au résultat. Il n'étoit question ici que de montrer par un calcul très grossier la compatibilité de l'émanation réelle avec le vuide & avec la conservation des corps lumineux pendant un très grand nombre de siecles; & celle-ci, sans supposer même que la matiere des rayons soit moins dense que celle du corps qui les lance, & sans recourir à la circulation, ou au reflux de cette matiere vers sa source; refluement qui pourroit cependant bien exister, sinon dans la totalité, du moins dans la plus grande partie.

Mais si le vuide paroit indispensable en Physique, & s'il est à l'abri des objections qu'on a puisées dans la Physique même, en peut-on dire autant des objections que la Métaphysique y oppose? Je ne m'arrêterai pas aux subtilités scholastiques par lesquelles on a combattu le vuide. Nous nous formons nous-mêmes des classes d'êtres, & s'il se présente ensuite des notions qui ne puissent pas trouver leur rang dans notre classification, nous leur refusons l'existence, parce que nous n'avons pas pensé à leur ménager une place. Quand même on ignoreroit

reroit si l'espace pur doit être mis au rang des substances, ou des modifications, ou des accidens, ou des rélations, ne suffiroit-il pas d'en avoir une notion bien précise & bien claire, qui le distinguât de tous les autres êtres? Cela suffit, sans doute, en Physique & en Géométrie, où l'on n'a pas besoin de remonter plus haut. Mais la Métaphysique veut aller au delà. Elle range l'espace dans la classe des rélations. L'*Espace*, selon Leibnitz, est la rélation des êtres qui existent en même tems. Cette définition, bien loin d'être opposée à la notion physique & mathématique de l'espace pur, ou du vuide, se concilie parfaitement avec elle. Qu'il y ait un intervalle sans matiere entre Mars, la Lune & la Terre, ou que cet intervalle soit rempli d'une matiere subtile étrangere à ces planetes, la rélation entre les trois globes, leur maniere de coexister ensemble, sera toujours la même; leur distance respective n'en est pas rapprochée, ou reculée d'un pouce; leur situation mutuelle, leurs aspects réciproques n'auront rien dans un cas, qu'on ne retrouve également dans l'autre. Rien n'empêche donc qu'on ne regarde en même tems l'espace comme l'ordre des coexistans, & l'espace pur comme une notion bien réelle.

Mais, dira-t-on, s'il n'y avoit point de corps, l'ordre des coexistans ne seroit rien. Cette conséquence ne me paroit ni juste, si l'on parle de l'existence idéale, ou de la simple possibilité; ni applicable ici, s'il s'agit de l'existence réelle. On demande si l'espace pur existe dans notre monde physique, qui est l'univers des corps; pourquoi supposer donc un univers où il n'y auroit point de corps? D'ailleurs l'idée des corps est possible & réelle avant leur existence actuelle; ainsi la notion de l'espace pur doit également être réelle, quand même il n'y auroit point de corps. Mars, la Lune & la Terre changent à chaque instant leur position mutuelle. Ils ne coexistent plus aujourd'hui comme ils coexistoient hier. Dira-t-on pour cela que l'espace qu'ils occupoient hier soit anéanti aujourd'hui? Aujourd'hui encore la même distance, la même rélation, le même aspect entre les trois points où leurs centres se trouvoient hier ne subsistent-ils pas; & ces trois points ne sont-ils pas aussi déterminés & aussi assignables dans l'univers après

que

que ces planetes ont quitté cette position, que lorsqu'elles l'ont prise? Ils le sont aujourd'hui quoique ces planetes ne s'y trouvent plus, ils l'étoient avant-hier quoiqu'elles n'y fussent pas encore; ils l'ont été avant la création même de ces globes, puisqu'ils entroient dans l'arrangement de l'univers idéal que l'entendement divin du suprême Architecte s'est représenté de toute éternité.

Pour peu qu'on se plaise donc à donner un bon sens aux auteurs qui ont éclairé l'esprit humain, & qu'on préfere la satisfaction de concilier leurs idées au penchant d'éterniser leurs disputes, on ne trouvera point d'inconvénient à dire avec Newton dans le sens physique & géométrique que l'espace est un être réel, immobile, susceptible de dimensions, &c. & d'ajouter, en analysant davantage cette notion, avec Leibnitz, que c'est l'ordre des simultanés, la rélation de distance, de situation, de connexion des êtres matériels qui existent, ou qui peuvent exister à la fois.

Mais que dirons nons du sentiment de ces grands hommes sur l'existence du vuide? Si Newton a prouvé qu'il n'est pas possible que les mouvemens s'exécutent & se conservent dans le plein absolu; Leibnitz n'a pas moins prouvé que la nature n'admet point de vuide, & que son idée répugne aux loix éternelles de la convenance. En adoptant les deux preuves, il faut nécessairement supposer une distinction entre le vuide physique & le vuide métaphysique; car deux vérités ne sauroient être en contradiction. Et pourquoi ne pourroit-on pas faire cette distinction? Elle découle de la nature & de l'objet des deux sciences que je viens de nommer. Qu'est-ce que le *vuide* en Physique? Ce n'est autre chose que l'espace pur, dont la notion, comme nous l'avons vû, n'a rien que de bien possible, & de très compatible avec la structure du monde matériel. Qu'est-ce, au contraire, que le vuide métaphysique? C'est une lacune, un défaut, une imperfection dans un tout; c'est l'absence d'une piece qui pouvoit & qui devoit entrer dans la construction de la machine; & c'est là le vuide que Leibnitz n'avoit garde d'admettre.

 Je

Je ſai bien que ce Philoſophe paroit exclure auſſi le vuide pris dans le ſens phyſique, & qu'on peut m'alléguer là deſſus des paſſages très précis tirés de ſes Ouvrages. Mais la plûpart de ces paſſages ſe trouvent dans ſes lettres contre Mr. Clarke; & l'on ſait aſſez que dans un commerce épiſtolaire & dans la chaleur d'une diſpute, on ne peſe pas toutes les expreſſions. Enſuite il eſt clair, ce me ſemble, que Leibnitz, qui avoit analyſé les notions confuſes que nous tenons des ſens, ne pouvoit pas conſidérer le vuide phyſique à la maniere des Newtoniens, lui pour qui la matiere elle même n'étoit qu'une apparence, ne pouvoit pas donner une plus grande réalité à l'abſence d'un phénomene. Mais un oeil microſcopique qui ne verroit que du jaune & du bleu, dans ce que nous nommons verd, nieroit-il pour cela l'exiſtence de cette ſenſation? Mr. Leibnitz pouvoit ſi peu nier l'exiſtence du vuide phyſique, que ce vuide eſt une ſuite naturelle de ſon ſyſtème ſur la combinaiſon des élémens ſimples. En effet, ſi l'aſſemblage de pluſieurs monades produit le phénomene de la matiere, la maniere de coexiſter de ces monades doit néceſſairement auſſi produire le phénomene du vuide phyſique, ou de l'eſpace pur. Puiſque deux élémens ſimples ne peuvent ni ſe confondre, ni ſe toucher; chaque monade doit occuper ſon lieu à elle, & la diſtance entre ces lieux ne ſauroit être que l'eſpace pur, ou le vuide phyſique dans le ſens le plus rigoureux. Nos deux Philoſophes ont par conſéquent dû l'admettre également; ils ont dû de même rejetter tous deux le vuide métaphyſique, puiſqu'ils reconnoiſſoient qu'un monde, l'ouvrage de la ſageſſe infinie, ne comporte point de tel vuide, & que la Nature, ou l'action continuelle des forces actives que Dieu a diſtribuées dans l'univers, n'y ſauroit tolérer des lacunes. Le monde créé eſt un aſſemblage admirable de corps partiaux, liés entr'eux par les loix les plus ſimples & les plus ſages, pour former un tout immenſe. Rien de ce qui a pû & dû entrer dans l'enchainement de ce tout, ne ſauroit en être exclu. L'univers eſt auſſi plein qu'il étoit poſſible qu'il le fût; & s'il y avoit encore une place vuide, qui eût pû être remplie, il ne ſeroit pas l'ouvrage de l'Intelligence ſuprême. Mais n'oublions pas que c'eſt

c'eſt une machine infiniment compliquée, & organiſée juſques dans ſes moindres parties. Que penſerions-nous d'une horloge dont l'ouvrier auroit rempli tous les intervalles des dents & des rouages par d'autres petites horloges, pour n'y laiſſer aucun vuide? Cette machine dont le mouvement ſeroit embarraſſé par ces hors-d'oeuvre, incapable, par conſéquent, de produire ſon effet, ſeroit-elle plus parfaite qu'une pendule dont les rouages, quoique artiſtement liés pour former un ſeul tout, laiſſent néanmoins entr'eux de grands eſpaces vuides, néceſſaires à l'agencement & au mouvement libre de chaque piece, auſſi bien qu'à l'engrénement des dents de chaque roue dans les ailes de ſon pignon? Ces eſpaces vuides, le fuſſent-ils même dans toute la rigueur du terme, dénués de toute matiere, & par conſéquent de toute réſiſtance, rendroient-ils la pendule moins parfaite; ou plutôt, ne ſont-ils pas auſſi eſſentiels à ſa perfection, que les pieces les plus ſolides qui la compoſent? Voilà le vuide phyſique. Mais ſuppoſons qu'une des dents ait été oubliée; que l'aile d'un pignon ſoit plus mince que la roue qui s'y engrene ne l'exigeoit; que le poids qui met en jeu toute la machine ſoit plus petit qu'il n'auroit dû l'être; voilà la lacune, le vuide métaphyſique, l'imperfection qui pouvoit être évitée ſans préjudice de la perfection du tout. Vuide intolérable & dans la nature, & dans les arts. Nous nous garderons bien d'en admettre un tel dans l'univers. Il contient autant de ſoleils; ces ſoleils régiſſent autant de planetes à orbites arrondies & allongées; chaque globe a préciſément autant de maſſe, de volume, d'habitans; la diſtance réciproque de ces mondes eſt pour chaque inſtant exactement telle, que la plus grande perfection du tout le demande & le comporte; & l'on n'eut pû ni ajouter, ni retrancher à aucun de ces égards quoi que ce fût, ſans rendre cette immenſe machine moins parfaite. C'eſt là l'excluſion du vuide métaphyſique, & ce qu'exige la notion de l'Intelligence ſuprême. Mais, ſi la nature particuliere des habitans animés & inanimés de chaque monde requiert que les planetes ſoient placées à des diſtances déterminées de leur ſoleil, ſi leur révolution ſe meſure ſur cette diſtance, ſi la régularité de leur mouvement & de leur retour périodique demande qu'elles ſe meuvent dans

des

dès espaces dénués de matiere, si enfin le fluide subtil dont on voudroit remplir ces grands intervalles que les loix générales de a nature exigent nécessairement; si ce fluide, dis-je, n'étoit qu'un hors-d'oeuvre propre à embarrasser les mouvemens des parties, sans contribuer à la perfection de l'ensemble: notre univers n'aura point de vuide dans le sens de Leibnitz, & pourra en renfermer beaucoup plus même que de matiere dans le sens de Newton. On comprendra pourquoi chaque globe n'a précisément que la masse & le volume qu'il a; quoique détaché du tout, rien n'eût empêché qu'il ne fût plus grand, ou plus petit. On concevra par quelle raison chaque atmosphere n'a qu'une certaine étendue déterminée. On ne sera plus surpris de la prodigieuse distance qu'il y a d'un soleil à l'autre; & bien loin que le vuide pris dans le sens phyque soit une lacune, ou une imperfection dans l'univers, on reconnoîtra sans peine qu'il y ajoute un très haut degré de perfection. Car s'il est vrai, comme personne n'en doute, que la plus grande magnificence dans le plan, jointe à la plus grande épargne dans l'exécution, doive caractériser l'ouvrage de l'Etre le plus sage & le plus intelligent; un monde qui avec peu de matiere, de mouvement & de forces, offre le spectacle le plus ravissant & la structure la plus merveilleuse, doit être plus digne d'admiration qu'un monde qui pour ne produire que les mêmes effets auroit exigé plusieurs millions de fois autant de dépense en matériaux.

CON-

CONSIDÉRATIONS PSYCHOLOGIQUES SUR L'HOMME MORAL.

PAR MR. SULZER (*).

Dans un Mémoire présenté à l'Académie il y a quelques années (**), j'ai essayé d'analyser la Raison: ici je me propose de faire un semblable essai sur la Vertu. Les Moralistes considerent ordinairement la vertu dans ses effets; & les Philosophes qui ont entrepris de remonter à son origine & à ses causes, se sont bornés presque tous à découvrir un principe général de toutes les actions libres, bonnes ou mauvaises. Quelques uns ont crû trouver ce principe dans l'*Intérêt*; d'autres dans l'*Amour propre*; d'autres encore dans un espece d'instinct inexplicable, auquel ils ont donné le nom de *Sens moral*. Que ce soit quel principe l'on voudra, qui détermine l'homme à agir, il reste toujours à savoir quelle doit être la détermination particuliere de ce principe pour que les actions soient vertueuses. Le scélérat agit autant par intérêt, ou par amour propre, que l'homme vertueux; on peut donc demander, *quelle est la constitution physique, soit de l'ame vertueuse, soit de celle qui ne l'est pas?* ou, quelles sont les facultés & les habitudes naturelles ou acquises, qui font le caractere de l'homme vertueux?

Il

(*) Lû le 23 de Novembre 1769.

(**) Mém. de l'Acad. pour l'Année MDCCLVIII.

Il n'y a, que je ſache, que *Wolff* qui ait donné un ſyſteme complet, pour réſoudre cette queſtion. Voici le précis de ce ſyſteme.

La loi générale qui, ſelon ce Philoſophe, doit déterminer toutes les actions libres de l'homme, eſt celle *de la perfection*. L'homme n'a d'autre véritable intérêt que celui de perfectionner, autant qu'il eſt poſſible, toutes ſes facultés naturelles. Ce principe établi, il entre dans tout le développement néceſſaire pour montrer en quoi conſiſte la perfection de chaque faculté, & il fait un détail immenſe de toutes les actions néceſſaires pour y parvenir. L'obligation que l'homme ſe ſent impoſée par la Nature, de faire toutes ces actions, eſt le *devoir naturel* de l'homme. Le ſyſteme ou le code des devoirs ainſi établi, Wolff recherche toutes les cauſes qui concourent pour donner à l'homme les diſpoſitions qui le mettent en état de remplir exactement juſqu'au moindre de ces devoirs. C'eſt de l'enſemble de ces diſpoſitions que réſulte la vertu.

Voilà un ſyſteme très bien lié, qui paroit épuiſer la matiere. Il eſt cependant à craindre qu'il n'ait le ſort d'un ſyſteme ſemblable qu'*Ariſtote* a donné ſur le raiſonnement. Tout le monde ſait que l'admirable théorie du raiſonnement du Philoſophe Grec a très peu contribué à perfectionner la raiſon; & je doute que le ſyſteme moral du Philoſophe Allemand rende des ſervices plus réels à la vertu.

Le génie philoſophique, pour découvrir le vrai, n'a pas beſoin de ſuivre pas à pas la route ſi exactement tracée par Ariſtote; & l'honnête-homme trouve le chemin de la vertu, ſans l'avoir cherché auſſi méthodiquement que Wolff. Le Génie en tout eſt un guide qui conduit par un chemin plus court que n'eſt celui des préceptes; & il y a un *génie moral*, comme il y a un génie philoſophique & un génie poétique. Découvrir la nature de ce génie moral, connoître les cauſes qui le fortifient, eſt une choſe plus importante que de détailler tous les préceptes de la morale.

Comment la vertu naît-elle au fond de l'ame? Comment y prend-elle ſon accroiſſement? Quel eſt le génie propre de cette qualité

lité précieuse; ou quelles sont les facultés de l'ame qui la fortifient & la perfectionnent? Voilà les questions que je me propose d'examiner.

Il est nécessaire que je commence par fixer l'idée de la vertu, & que je démontre sa réalité. Ce dernier point ne paroît pas encore hors de toute contestation. Il y a des Philosophes qui prétendent avoir observé qu'il n'y a rien de louable ou de blâmable chez quelque peuple que ce soit, qui n'ait ou qui du moins ne passe pour avoir la qualité opposée dans les idées de quelqu'autre peuple; que tout ce qui est vertu chez les uns, est vice chez d'autres. J'ignore si cette observation est vraie; mais il me semble qu'elle pourroit l'être, sans que la conclusion qu'on en tire soit juste. Car, si une proposition affirmée par quelqu'un est niée par quelqu'autre, il ne s'ensuit pas qu'elle ne soit ni vraie, ni fausse. S'il n'y a aucune action généralement reconnue pour vertueuse, il ne s'ensuit pas non plus, que toute action soit absolument indifférente. Mais je crois qu'il faut entrer ici dans quelque détail.

Nous ne connoissons aucun peuple qui ne juge qu'il y a des actions louables & des actions blâmables. Les hommes sentent donc qu'il y a du bon & du mauvais dans les actions libres; mais ils ne s'accordent pas tous sur la qualité de ce qu'ils jugent bon ou mauvais, soit qu'ils ne jugent pas tous d'après le même principe, soit qu'ils ne sachent pas tous en faire une juste application. La même chose arrive rélativement au vrai, sur lequel les Philosophes s'accordent rarement. Il y a beaucoup d'analogie entre le vrai & le bon; & je crois que, comme la secte des Pyrrhoniens est éteinte aujourd'hui parmi les Nations savantes, le pyrrhonisme moral le sera un jour. Les Philosophes reconnoissent qu'il y a du vrai & du faux dans nos connoissances, sans que l'on blâme pour cela la timidité des anciens Académiciens qui rarement osoient prendre le ton décisif. Les Moralistes peuvent souvent admettre le doute de ces mêmes Académiciens, sans être blâmables pour cela. Ce n'est que le pyrrhonisme moral que je tâche de combattre ici. Je crois même qu'il est plus facile de se convaincre

de la réalité des principes de la Morale que de celle des principes de nos connoiſſances. Ceux-ci ſont fondés ſur la nature de nos conceptions, & ceux-là ſur celle de nos ſentimens, dont la voix eſt plus claire & plus forte que celle des conceptions.

Nous nions une propoſition parce que nous ſentons l'impoſſibilité de la concevoir, ou parce que nous ſentons que, pour l'admettre, il faudroit faire à la fois deux actes de l'eſprit qui ſe détruiſent mutuellement. Comme il eſt impoſſible, lorſqu'on marche, d'avancer & de reculer, de tourner à droite & à gauche en même tems & par un même acte; il eſt de même impoſſible à l'eſprit de faire à la fois deux actes oppoſés, de voir la réalité & la non-réalité d'une choſe. Voilà ſur quoi eſt fondé *le principe de contradiction*, qui nous guide dans nos jugemens ſur les vérités néceſſaires. Nous ſuſpendons de même notre jugement lorſque les raiſons déterminantes pour prononcer nous manquent; parce qu'il ne nous eſt pas poſſible de ſentir l'influence des raiſons déterminantes, & de ſentir en même tems leur non-exiſtence. Ceci eſt le fondement du *principe de la raiſon ſuffiſante*. On ſait que toute vérité eſt fondée ſur l'un ou l'autre de ces deux principes.

Il en exactement de même de nos jugemens ſur ce qui eſt moralement bon ou mauvais. S'il y a du poſſible & de l'impoſſible dans nos conceptions, il y en a auſſi dans nos ſentimens; & c'eſt ſur cela que ſe fonde la moralité.

Que l'homme ait une conſtitution ou un naturel qui, malgré les différences ſpécifiques, produites par le caractere national & individuel, ſoit partout le même, & qu'il ſoit inaltérable; c'eſt de quoi il n'eſt pas poſſible douter. Chaque production de la nature a ſon caractere propre & indélébile, qui peut être déguiſé, un peu altéré, mais qui reſte indeſtructible. Dans l'homme il y a deux facultés qui ſont aſſujetties à des loix invariables. Nous venons de voir que la faculté de concevoir ſuit des loix conſtantes desquelles on a tiré les deux principes de nos connoiſſances. La faculté de ſentir a auſſi ſes loix invariables.

bles. Une de ces loix eſt, qu'on ne peut rien déſirer qui ſoit déſagréable, & qu'on s'oppoſe à tout ce que l'on ſent être contraire à ſa nature. C'eſt de cette loi que l'on déduit ſans aucune incertitude ce principe moral: que l'homme eſt dans l'obligation de faire toutes les actions ſans leſquelles ſa conſtitution ſeroit troublée, & d'éviter celles dont les ſuites ſont en contradiction avec ſes affections naturelles & inaltérables. On peut appeller cela *le principe de ſageſſe;* il eſt auſſi réellement fondé dans la nature de nos ſentimens, que le principe de contradiction eſt fondé dans celle de nos conceptions. Même évidence dans l'un & dans l'autre de ces principes; mêmes difficultés dans l'application.

De la combinaiſon de ce principe avec ceux des connoiſſances, naît avec la même évidence l'autre principe moral, que nous nommerons *le principe de juſtice.* Il a pour fondement l'égalité naturelle des hommes; égalité ſi inconteſtable qu'on n'oſeroit refuſer d'en admettre la vérité comme un axiome. Une conſéquence immédiate de cet axiome eſt cette propoſition: que ce qu'un homme ſe doit à lui-même en vertu de ſa nature, tout autre ſe le doit auſſi. Ce qui eſt néceſſaire à l'homme pour qu'il puiſſe ſatisfaire à ce qu'il ſe doit, eſt l'objet d'une prétention juſte: donc l'homme a des prétentions auxquelles il ne peut renoncer. La réalité de ces prétentions forme ce qu'on appelle *Droit.* De la combinaiſon de toutes ces idées on déduit le principe de juſtice: que chacun eſt obligé d'accorder à tout autre le droit auquel, en vertu de ſa nature, il prétend lui-même. Les raiſons étant égales de part & d'autre, il ſeroit abſurde & contradictoire d'en tirer des concluſions oppoſées. Voilà le principe de juſtice, auſſi évident & auſſi réel que le principe de ſageſſe.

Il y a donc des principes réels qui doivent régler les actions libres de l'homme; par conſéquent il y a des devoirs, des actions bonnes ou mauvaiſes par leur nature. Connoître ſes devoirs dans toute leur étendue, & avoir toutes les diſpoſitions néceſſaires pour les remplir exactement, ce ſeroit être parfaitement vertueux.

C'eſt la réalité de cette idée que je m'étois propoſé d'établir avant que d'entrer dans les recherches qui font le ſujet de ce Mémoire. Cette diſcuſſion préalable nous aſſure de la réalité de l'objet de nos recherches, & nous indique en même tems la route qu'il faut y ſuivre.

Il s'agit maintenant de connoître exactement l'origine & les progrès de la vertu, de voir ſans ambiguïté les cauſes qui la font naître & les obſtacles qui en empêchent les progrès. Je commence par ce qui eſt rélatif aux devoirs de l'homme envers lui-même.

Comment l'homme parvient-il à connoître ſes devoirs, & comment s'y attache-t-il?

La connoiſſance des devoirs, comme celle de toute autre choſe, eſt l'effet de la réflexion. L'homme abſolument brute, deſtitué de la faculté de réfléchir, ne connoît rien; il n'y a aucune trace de vertu dans ſon ame. C'eſt ici le point d'où nous partons pour ſuivre la vertu depuis ſon premier germe juſqu'à ſon développement complet.

L'homme ſauvage n'a d'autres idées que celles qui répondent aux ſenſations, ni d'autres beſoins que celui d'éloigner de lui toute ſenſation déſagréable. Dans cet état, ſes actions ne ſont pas plus réfléchies que celles des bêtes. Bien que très fidele à la voix de la Nature, il n'a pas encore le plus petit degré de vertu. Parvenu à la réflexion, il commence à découvrir la liaiſon entre ſes beſoins & ſa conſervation, à connoître la néceſſité des actions que l'inſtinct ſeul lui a fait faire juſqu'alors. Si cette découverte fixe ſon attention, s'il s'apperçoit qu'indépendamment des ſenſations, il y a des raiſons qui le porteroient à chercher telles choſes, & à en éviter telles autres, ſi ces raiſons deviennent des principes déterminants qui ſe joignent à l'inſtinct; c'eſt alors qu'il commence à être vertueux, quelque bornée que ſoit ſa Morale.

La Vertu, dans ſa naiſſance, n'eſt donc que la diſpoſition à faire par connoiſſance de cauſe, ou par raiſon, les actions que l'homme

ſauvage

sauvage fait par instinct. Dès le moment que la voix de la raison se fait entendre & qu'on s'y soumet, on commence à être vertueux. Cette vertu au fond n'est autre chose que 1°. la raison appliquée à la considération des besoins physiques, & 2°. la disposition à suivre les lumieres qu'elle répand sur ces besoins.

A mesure que la raison se perfectionne, cette Morale si simple & si imparfaite, dont nous avons parlé, s'étend & donne lieu à la vertu de faire des progrès. L'habitude de réfléchir fait voir au demi-sauvage même qu'il doit chercher ou éviter certaines choses sans qu'aucune sensation présente l'exige. Le premier hiver un peu rude lui fera sentir la nécessité de prévoir les besoins futurs; & il suffit que l'ardeur de poursuivre une bête l'ait entraîné dans des lieux où il a risqué de périr, ou que l'intempérance l'ait rendu malade, pour lui faire comprendre que ce n'est qu'avec précaution qu'il peut se livrer aux impressions présentes. Dès qu'il est capable de donner à ces réflexions un degré suffisant d'évidence, il étendra sa Morale en y ajoutant de nouveaux préceptes. Il ne les appliquera d'abord qu'aux cas particuliers qui les ont fait naître; mais plus d'expérience & un progrès proportionné de la raison l'aideront à les généraliser. C'est ainsi que l'homme rendra sa Morale de plus en plus complette, & qu'il parviendra à la fin à connoître tous ses devoirs relativement aux besoins physiques.

Il n'aura pas joui longtems du secours de la raison sans éprouver des sentimens aussi vifs & aussi intéressans que les sensations mêmes: le regret & le repentir. Ces deux sentimens suivent de près ce degré de raison, qui permet à l'homme de connoître l'influence du passé sur le présent. Cela le conduira à la découverte d'un autre genre de besoins, aussi naturels que les besoins physiques; ce sont ceux d'être content de soi-même, de n'avoir rien à se reprocher, de perfectionner ses facultés, de se rendre de jour en jour plus habile, plus fort, plus intelligent, plus judicieux, plus circonspect. Enfin, avançant toujours en expérience & en réflexion, il verra la connoissance des besoins

besoins moraux s'étendre aussi; il sentira qu'un de ses besoins est de gagner l'estime, la bienveillance, l'amitié de ceux avec qui il vit.

C'est ainsi que la connoissance réfléchie des besoins s'accroît avec la raison & l'habitude de réfléchir. De cette connoissance dépend celle des devoirs de l'homme envers lui-même, de sorte que ce que je viens d'observer suffit, pour expliquer par quels degrés l'homme parvient à la connoissance de cette branche de ses devoirs. Elle n'a d'autres bornes que celles de l'expérience & de la raison; c'est à dire, qu'elle peut aller à l'infini. Aussi longtems que l'expérience & la raison appliquées à nos besoins s'étendent, la connoissance de nos devoirs s'étend aussi, & la Morale devient de plus en plus compliquée, bien que les principes sur lesquels elle est fondée, soient très simples. Il en est donc de la Morale comme des sciences, dont aucune ne peut avoir de bornes fixes.

Cela nous donne lieu d'observer que c'est avec fort peu de raison que quelques Philosophes prétendent prescrire des bornes à la Morale. Ils aiment à considérer l'homme dans un état qui ne présente qu'un petit nombre de rélations, & où ses connoissances sont renfermées dans un cercle fort étroit. Ils observent qu'il seroit facile de remplir tous les devoirs d'un tel état, & d'y être très heureux. Ils s'imaginent que cet état seroit l'âge d'or, tant vanté par les Poëtes. Remplis de ces idées, ils exhortent les hommes à retourner à cette heureuse ignorance & à la Morale simple de ces peuples qui ne connoissent d'autres rélations que celles qui tiennent immédiatement à la Nature.

Ces idées sont très agréables & même séduisantes; cependant on les trouve chimériques dès que l'on commence à les approfondir. Cet état d'enfance dans lequel on voudroit entretenir les hommes, est contraire à la nature de l'esprit humain, incapable de mettre des bornes à ses réflexions & à ses recherches. Il est aussi impossible de conserver un peuple entier dans l'état de simplicité, que de maintenir un homme dans une jeunesse éternelle. Ce qui arrive à l'individu, arrive à l'espece

entiere

entiere. Auſſi longtems que l'homme conſerve ſa vigueur, il étend ſon expérience & ſes réflexions; & par là même il découvre de nouvelles rélations, des beſoins nouveaux & des devoirs auparavant inconnus. C'eſt auſſi le cas d'un peuple entier. Ses connoiſſances, ſes arts, ſes rélations, ſes beſoins ſe multiplient: les devoirs ſe multiplient de même, la difficulté de les remplir tous augmente, & la vie heureuſe devient enfin une choſe très difficile & même impoſſible. Mais c'eſt le ſort de l'humanité, qu'il ne nous eſt pas poſſible de changer. Les Sciences, comme la Morale, ne ſouffrent point de bornes: il faut ou les abandonner tout à fait, ou les ſuivre juſques dans les plus petites branches qu'elles ne ceſſent de jetter.

Nous venons de voir par quels moyens & par quels degrés l'homme étend peu à peu la connoiſſance de ſes beſoins & des devoirs qui en réſultent: il faut maintenant examiner comment ſe fortifie l'attachement à ces devoirs & l'habitude de les remplir.

Il a été obſervé plus haut, que l'attachement au devoir réſulte de l'évidence avec laquelle on en ſent la vérité ou la néceſſité. C'eſt ce qu'il faut examiner ici plus particulierement, en détaillant tout ce qui appartient à cette matiere.

La grande diſtance qu'on obſerve entre la connoiſſance d'une vérité, & cette maniere de l'appercevoir qui lui donne une force active ſur l'ame, a frappé tous les Philoſophes Moraliſtes. Cela a donné lieu à ce grand problême: *de quelle nature doit être la connoiſſance qui influe ſur nos actions?* J'ai eſſayé de donner une ſolution de ce problême, dans un Mémoire lû à l'Académie (*): mais ce n'étoit que par occaſion que j'en parlai alors. Je completterai donc ici la ſolution dont je n'ai donné que l'abrégé dans l'endroit cité.

La nature du motif eſt de produire dans l'ame un déſir. Le déſir ſuppoſe toujours une gêne dont on cherche à ſe délivrer. C'eſt de

(*) Mém. de l'Acad. pour l'Année MDCCLIX. *Explication d'un paradoxe pſychologique &c.*

de cette gêne que le motif prend sa force. De là il s'ensuit qu'une vérité, pour devenir motif, doit produire quelque gêne dans l'esprit. Il s'agit donc d'examiner comment cela arrive.

Cette recherche dépend du développement exact de ces deux actes de l'esprit que l'on exprime par les mots *connoître* & *sentir*. Car nous verrons que la vérité que l'on conçoit simplement ne devient jamais motif, & que celle que l'on sent influe sur nos actions. La nature de ces deux actes de l'ame a été développée fort au long dans un des Mémoires précédens (*); c'est de là que je vais tirer les éclaircissemens nécessaires.

Lorsque nous réfléchissons sur quelque objet que ce soit, nous le voyons comme hors de nous, comme une chose séparée de nous; lorsque nous le sentons, nous le voyons dans nous & comme une modification de notre ame. Dans le premier cas, nous dirigeons toute notre attention vers l'objet, & nous nous oublions en quelque façon nous-mêmes; dans l'autre cas, l'attention est dirigée vers nous-mêmes, nous rentrons en nous, pour observer les modifications présentes de notre état intérieur. Là, l'objet que nous voyons est un objet de curiosité, & toutes les forces actives de l'esprit tendent à le connoître; ici, c'est un objet de jouissance, dont nous observons l'effet sur nous. Supposons pour éclaircir cela que dans la conversation on parle de la mort & de la vie à venir. Un homme plein de santé & de vigueur, qui suppose tacitement que cette catastrophe à laquelle nous sommes tous soumis, est encore fort éloignée de lui, entend ce discours, & l'applique aux malades & aux vieillards qu'il connoît, sans en faire la moindre application à lui-même; la mort est un objet qu'il voit comme dans un grand éloignement; il conçoit ce que l'on dit, mais il ne le sent pas. Un malade, ou un homme auquel l'idée d'être mortel est familiere, entend le même discours; il rentre en lui-même, il se représente comme mourant; toutes les idées de la mort & de la vie à venir sont dans son ame des modifications prêtes à y produire un change-

(*) *Sur les divers états de l'ame &c.* Mém. de l'Acad. pour l'Année MDCCLXIII.

changement; il perd de vûe celui qui parle & le discours même, fixant son attention sur ce qui se passe au dedans de lui. Il sent l'idée de la mort comme dans lui, il regarde la mort comme un état prochain, prêt à éclorre en lui, & il en est ému. Voilà ce que c'est que *voir* une chose, & la *sentir*.

C'est de ces deux manieres que les vérités morales peuvent se présenter à l'esprit. Si l'on ne fait que les voir, elles ne produisent qu'un jugement affirmatif ou négatif; si on les sent, elles modifient l'ame de maniere à y produire un changement d'état: l'ame entre dans la disposition, non de juger, mais de s'éloigner d'un état désagréable, ou de parvenir à un état agréable.

La vérité que l'on veut sentir, doit faire contact avec l'ame, s'y incorporer, s'il est permis de parler ainsi. Alors les idées qu'elle renferme, font partie de nous-mêmes; nous observons leur liaison avec les dispositions actuelles où nous sommes, & cela produit ce que j'appelle la disposition prochaine pour agir. Pourquoi le récit d'un malheur arrivé dans quelque pays éloigné, nous touche-t-il ordinairement si peu? C'est parce que nous nous le représentons comme loin de nous. S'il est arrivé dans la ville où nous demeurons, dans notre voisinage, au moment même que nous en entendons la nouvelle, cela produit ordinairement une forte émotion, parce que les circonstances du tems & du lieu nous forcent en quelque façon de rentrer en nous-mêmes, & de nous en faire l'application; nous nous mettons à la place de ceux qui souffrent, nous sommes dans la disposition prochaine à sentir en nous l'effet du malheur arrivé; & cela cause l'émotion en conséquence de laquelle nous faisons des efforts qui tendent à nous soulager.

Il est essentiel d'observer que les idées qui ne peuvent pas avoir un rapport immédiat à notre état, & qui par conséquent ne se prêtent pas à cette incorporation dont j'ai parlé, peuvent être vues, mais qu'elles ne se font jamais sentir. Un petit particulier qui sent la distan-

 ce

ce immenſe qu'il y a entre lui & le thrône, voit la grandeur & la majeſté qui environne un Souverain; c'eſt pour lui un objet de curioſité, ou ſi l'on veut, d'admiration. Mais, comme il n'eſt pas poſſible qu'il s'approprie rien de tout cela, tout étant hors de ſa portée, il n'en conçoit aucune jalouſie. Mais un Prince ſubalterne peut fort bien entrer dans cette diſpoſition prochaine, de ſentir en ſoi-même l'effet de tout ce qui appartient à cette grandeur; & cela peut fort facilement piquer ſon ambition.

Ces obſervations nous mettent en état de déterminer plus particulierement les conditions requiſes pour que la vérité influe ſur nos actions. Il faut pour cela, 1°. que les idées qu'elle préſente nous ſoient ſi familieres, que par un ſeul acte d'intuition nous les ſaiſiſſions clairement. Cela eſt néceſſaire afin que l'attention, qui doit être dirigée vers nous-mêmes, ne ſoit pas détournée de nous & fixée ſur l'objet. 2°. Que ces idées ſoient tellement à notre portée, que nous puiſſions nous les appliquer. Cela veut dire que ces idées doivent avoir un rapport immédiat à nos ſentimens. Un homme né dans la ſervitude, qui n'a jamais joui d'un inſtant de liberté, ne peut nullement ſentir ou s'appliquer l'idée de la liberté. 3°. Qu'au moment que la vérité ſe préſente à nous, nous ſoyons dans la diſpoſition de rentrer en nous-mêmes pour éprouver l'effet qu'elle peut faire ſur nous. Car le même homme, ſelon les diverſes diſpoſitions paſſageres où il ſe trouve, peut être & n'être pas touché de la même vérité. C'eſt ainſi que, ſelon l'état actuel où nous nous trouvons, le même objet eſt pour nous, tantôt un objet de curioſité, tantôt un objet de convoitiſe. Cette troiſieme condition a lieu, ſi, au moment que la vérité ſe préſente à nous, il y a quelque choſe qui nous force à éprouver un ſentiment quelconque, par où nous ſommes obligés de diriger l'attention ſur nous-mêmes. C'eſt ainſi que les mêmes paroles qui, prononcées avec chaleur, nous touchent, ne font aucun effet, ſi on les prononce froidement. C'eſt le ton qui a l'énergie de produire le ſentiment, & qui nous force ſubitement de rentrer en nous-mêmes.

Après

Après cette digression, qui m'a paru nécessaire, je reviens à mon sujet. J'ai dit plus haut que, pour faire son devoir, il faut le connoître & l'aimer. J'ai fait voir comment l'homme parvient à connoître tous les devoirs envers soi-même: & les observations précédentes nous feront comprendre, comment il peut parvenir à les aimer; ou ce qui revient au même, comment la connoissance du devoir devient un motif pour agir?

L'homme qui s'est rendu ses devoirs fort familiers, qui est dans l'habitude de rapporter promptement à lui-même ou à son état tous les objets qui selon ses idées s'y rapportent réellement, qui a par là la facilité de se prêter à l'impression que font ces objets sur lui, & d'entrer dans la disposition prochaine d'agir; cet homme a les dispositions nécessaires pour être vertueux. Lorsqu'on sent son devoir de cette maniere, l'idée de le négliger ne fait pas seulement une contradiction que l'esprit conçoive, mais une opposition, ou contrariété, une espece de combat dans les modifications de l'ame, lequel produit une gêne considérable. Cette idée de négliger son devoir devient révoltante.

On voit par là qu'outre la conception prompte & juste du rapport des choses, il faut pour être vertueux 1°. cette solidité de l'ame qui fait qu'on envisage tout, non avec un esprit spéculatif, mais du côté de son rapport à nos besoins physiques ou moraux (*), & 2°. la sensibilité, pour être promptement touché ou ému.

Les dispositions contraires à la vertu sont: 1°. Un esprit hébêté ou lent, qui fait qu'on ne saisit, ni assez promptement, ni avec assez de clarté, les rapports des choses. 2°. L'esprit volage qui de tout ce qu'il voit ne fait qu'un objet de curiosité, & qui ne se prête jamais ou

 très

(*) Je sens que je n'exprime pas assez clairement ce que je pense ici. La solidité morale va au fait sans s'arrêter à la spéculation. Comme dans le plus bas âge les enfans portent à la bouche les jouets mêmes qu'on leur donne, le Sage applique tout ce qu'il voit à son ame, & réfléchit sur l'impression qu'il en reçoit.

très rarement aux objets pour observer les impressions qu'ils font sur lui. 3°. L'esprit spéculatif qui ne cherche qu'à approfondir les choses comme des objets de curiosité, ou comme une matiere propre à exercer son esprit, qui voit tout par analyse, & qui ne sent rien par intuition; qui n'est qu'esprit & qui ne connoît pas les sentimens du coeur.

J'ai exposé jusqu'ici l'origine, les progrès, & les causes psychologiques de la vertu rélativement à l'une de ses deux branches, à celle que l'on peut nommer la Sagesse. Je vais la considérer encore dans sa plus grande perfection.

Les devoirs envers nous-mêmes tendent tous au même but, qui est de satisfaire à nos besoins tant physiques que moraux. L'homme seroit heureux, s'il pouvoit y parvenir. Des observations faciles à faire peuvent le convaincre que le bonheur parfait est une chimere. Ce n'est pas seulement par foiblesse qu'il manque souvent à son devoir; d'autres causes sur lesquelles il n'a aucune influence, troublent ce bonheur. Nombre de maux sont inévitables; & il arrive aussi que, par des circonstances qui ne dépendent pas de nous, il nous est impossible de satisfaire à nos besoins. Les maux étant donc inévitables, il faut les diminuer en les supportant. De là naît un nouveau besoin, celui d'être au dessus de ces besoins auxquels il est impossible de satisfaire. L'imperfection attachée à l'humanité nous fait concevoir la nécessité de ces vertus que l'on nomme modération, patience, force d'esprit. Il n'est donné qu'à un petit nombre d'ames privilégiées de s'élever à ce faîte de la sagesse, qui les rend supérieures aux maux inévitables. On sait que les Stoïciens ont fait une étude particuliere de cette branche de la Morale, & que plusieurs d'entr'eux y ont réussi supérieurement & même d'une façon étonnante. Quel est le chemin qui conduit à ce haut degré de sagesse? C'est encore l'intuition vive de la vérité.

Connoître d'abord, & puis sentir de la façon que j'ai décrite plus haut, cette vérité, que nous sommes des êtres trop bornés pour satis-

satisfaire absolument à tous nos besoins; sentir par conséquent la nécessité inévitable des maux; sentir l'inutilité de tous les efforts qu'on voudroit faire pour s'y soustraire; cela produit la patience. De plus, connoître d'abord & puis sentir vivement cet esprit de sagesse & de bonté que l'on découvre dans tous les arrangemens généraux de la Nature, & dans le gouvernement du Monde; connoître & sentir le bel ordre qui, malgré les désordres apparens, se découvre dans l'Univers; s'élever ensuite jusqu'à l'idée sublime d'un Etre infiniment parfait, qui indubitablement est l'Auteur de l'arrangement immense de cet Univers, qui indubitablement a agi d'après les regles de la plus grande perfection; voilà ce qui peut produire ces vertus qui font le comble de la sagesse. Mais il faut, comme nous l'avons dit, saisir tout cela avec une facilité & une clarté si grande, que le sentiment qui en résulte soit plus fort que la sensation des maux qui nous accablent; ou du moins, que le sentiment, produit par l'intuition des vérités sublimes, soit capable de diminuer considérablement ces sensations douloureuses. Voilà en quoi consiste le supreme degré de sagesse. Satisfaire autant qu'il est possible à tous les besoins de son état, s'élever en même tems au dessus de ceux auxquels il est impossible de satisfaire; c'est ce qu'Horace exprime dans ces beaux vers:

Rectiùs occupat nomen beati
Qui Deorum muneribus sapienter uti
Duramque callet pauperiem pati.

Voilà ce qu'il y a de remarquable dans l'origine & les progrès de la sagesse.

L'autre branche de la vertu, la Justice, offre des considérations particulieres, qu'il est nécessaire de développer.

La base de la justice, comme il a été remarqué plus haut, est cet axiome, que tous les hommes ont les mêmes prétentions natu-

naturelles; & la Morale qui en résulte est renfermée dans cette regle: qu'il ne faut troubler personne dans la poursuite de son droit. C'est ce que les Jurisconsultes expriment par cette regle fondamentale de la justice: *neminem lædere.*

Il est aisé de voir que le nombre des préceptes ou des devoirs particuliers que l'homme peut déduire de cette loi générale de la justice, est toujours proportionné au degré d'étendue qu'il a donné à la sagesse. Il faut connoître à fond ses droits pour être convaincu de ceux des autres. Car les prétentions que nous formons pour nous, sont justement celles des autres. Le demi-sauvage, qui ne forme d'autres prétentions que celles qui ont ses besoins physiques pour objet, n'en peut accorder que de telles aux autres hommes. La justice n'a donc jamais plus d'étendue que la sagesse; & tout ce que nous avons observé sur les progrès de cette vertu, peut être appliqué à la justice.

Mais on peut être sage & n'être pas juste. Il est donc nécessaire que nous examinions en particulier, quelles sont les causes qui produisent cette vertu. La simple réflexion suffit pour conduire à la sagesse; mais cela ne suffit pas pour faire naître la justice, qui tire son origine d'un raisonnement fort simple à la vérité, mais qu'il faut avoir fait pour être juste par principe. Voici ce raisonnement. Tous les hommes sont égaux; par conséquent ils ont les mêmes prétentions naturelles. Or j'ai telles prétentions; donc tout autre que moi les a aussi; donc il seroit absurde & contradictoire de les lui disputer.

Il est bon d'observer ici qu'il n'y a gueres d'hommes, si l'on excepte ceux qui sont nés stupides, qui ne réfléchissent; car leurs sensations les obligent de diriger l'attention vers les objets qui y sont rélatifs; mais tous les hommes ne raisonnent pas, parce que cette opération de l'esprit ne tient pas à la sensation. Il est très vraisemblable qu'il y a des hommes qui ne raisonnent jamais. Sans

parler

parler des Nations presque tout à fait sauvages, telles que sont les Groenlandois, on trouve parmi les peuples civilisés des individus, qui, sans être stupides, ne suivent aucun raisonnement; qui ne sentent aucune répugnance à admettre des propositions évidemment contradictoires.

De tels hommes peuvent fort bien parvenir à un petit degré de sagesse; mais il est impossible qu'ils parviennent au plus petit degré de justice. Ils pourront avoir des sentimens d'humanité & d'équité, qui assez ordinairement tiennent lieu de justice aux hommes qui ne raisonnent pas. Mais ce n'est pas de cette ombre de la justice dont il s'agit ici. Il est visible, & l'expérience le prouve assez, que l'homme le plus complettement injuste, le tyran le plus atroce,

qui negat jura sibi data,

peut sentir des mouvemens de compassion; témoin ce fameux tyran de Phérès, qui fut tellement ému dans une Tragédie, qu'il se sentit obligé de sortir, ayant honte de sa compassion, quoiqu'il n'eût jamais connu l'injustice de sa tyrannie (*).

Ce que je viens de remarquer prouve qu'il est plus difficile d'être juste que d'être sage, par la raison qu'on peut parvenir à un certain degré de sagesse par la reflexion seule, & qu'il faut raisonner pour parvenir au plus petit degré de justice. Mais le raisonnement seul ne suffit pas pour faire naître la justice dans le coeur de l'homme. Il faut se rappeller ici ce que j'ai observé plus haut sur ce qui rend la vérité active. Alors on comprendra qu'on ne peut commencer à être juste, que lorsqu'on est parvenu à ce degré de raison, qui change en sentiment la perception ou la connoissance du vrai. Cette vérité qui fait la base de la justice, doit tellement être incorporée dans l'ame qu'elle s'y fasse sentir comme une de ses modifications; qu'à l'apparence de tout ce qui est contraire à cette vérité,

(*) Voyez Plutarque dans son Traité *sur la Fortune d'Alexandre.*

vérité, l'esprit ne s'apperçoive pas seulement de la contradiction, mais que l'ame sente la gêne, comme elle la sent dans ces cas où une sensation la force d'admettre ce qui est contraire à sa nature. Ce n'est que par une longue habitude qu'on parvient à sentir la force de l'évidence, surtout rélativement aux vérités qui n'intéressent directement que les autres. Il est infiniment plus facile de recevoir des impressions fortes des idées qui ont un rapport immédiat à nos propres besoins, que de sentir un tel effet lorsque les idées se rapportent aux besoins des autres. Ordinairement les hommes sont trop occupés d'eux-mêmes pour s'occuper bien sérieusement des autres. Tout au plus est-on vivement frappé des droits de ses amis; ceux des autres ne sont reconnus que par spéculation, c'est à dire, on les reconnoit, mais on ne les sent pas.

Cela nous fait comprendre pourquoi il est si rare de trouver des hommes vraiment justes; & qu'il y a cent personnes charitables contre une seule qui soit juste.

Ce que je viens de remarquer est vrai, à ne considérer même la justice que dans son commencement; mais toutes ces raisons deviennent encore beaucoup plus fortes, lorsqu'il s'agit d'un degré de justice qui ait une étendue considérable. Il y a bien des personnes qui comprennent qu'un certain ordre de gens a droit de prétendre à ce qui est rélatif aux besoins physiques, mais qui ne comprennent point que les mêmes gens ayent la moindre prétention à des biens qu'eux regardent comme aussi essentiels que ceux que les besoins physiques rendent nécessaires. Le monde est rempli de gens qui étendent sur tous les autres biens de la vie la ridicule prétention de l'avare de Moliere, qui vouloit que sa maison fût rassasiée, lorsqu'il avoit bien diné lui-même. Ils n'accordent le plus nécessaire aux autres, que comme un enfant jette un morceau de pain à son chien; c'est en forme de grace ou de bienfait, souvent même par voie d'amusement.

Quelques

Quelque évidente que soit la vérité qui fait la base de la justice, rien n'est plus difficile que de la sentir dans toute son étendue; car de tous les préjugés celui dont l'homme se dépouille le moins, est celui par lequel il s'attribue implicitement certains privileges exclusifs.

La justice parfaite n'a lieu que lorsque l'homme a rempli les quatre conditions suivantes: 1. Qu'il connoit exactement toute l'étendue de ses devoirs envers lui-même. 2. Qu'il conçoit bien distinctement que tous ces devoirs sont des résultats de sa nature, & que l'intuition de cette vérité lui est familiere. 3. Qu'avec la même évidence & avec la même intuition habituelle, il considere ce que les autres se doivent à eux-mêmes. 4. Que l'idée de l'égalité des hommes a tellement rempli son ame, qu'il est allarmé ou choqué à la moindre apparence du contraire. Comme il y a une vertu qui fait le comble de la sagesse, il y en a de même une qui surpasse la justice. C'est la générosité. L'origine & les causes de cette vertu nous restent à considérer.

La justice peut être regardée comme une vertu passive; elle tend plutôt à empêcher le mal qu'à produire le bien. La générosité est plus active; elle tend directement à produire le bien & à diminuer le mal, que la justice même laisse subsister. La justice tend à égaliser les hommes; la générosité tend à ne faire de tous les hommes qu'un seul individu; car elle n'est au fond que la disposition à ne sentir son intérêt que dans celui de tout le genre humain. *Humani nil alienum a se putat*, comme s'exprime noblement *Terence*.

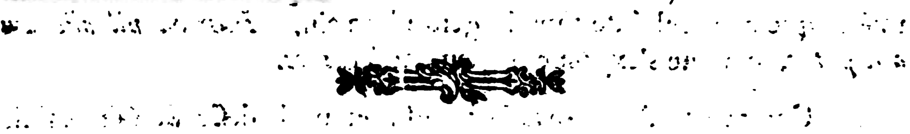
Comment naît en nous la disposition ou le desir de faire valoir les prétentions des autres? Qu'est-ce qui nous engage à poursuivre le droit des autres, comme s'il étoit notre droit?

Nous avons vû que la justice tient à l'amour du vrai; la générosité paroit tenir à l'amour de l'ordre & de la perfection. Je ne parle point ici de la générosité de tempérament; je la considere, de même

 que

que la sagesse & la justice, comme un effet des principes ; & je trouve ces principes dans ce que je viens de dire. Comme la sagesse ne parvient à son plus haut point, que lorsque le sage s'éleve jusqu'à la contemplation des arrangemens généraux de la Nature ; l'homme juste de même ne monte au faîte de la justice, qui est la générosité, que moyennant un sentiment vif de cet ordre admirable par lequel tout est tellement arrangé dans le monde, qu'il n'y a rien d'isolé ou de séparé du reste, mais que chaque individu tend à la perfection du Tout ; où nul être ne peut remplir sa destinée par soi seul. Ces considérations sont beaucoup plus difficiles à saisir, que celles qui appuient la justice. Et lorsqu'on les a saisies il faut encore se les approprier au point que, de simples spéculations, elles deviennent des principes actifs. Aussi n'y a-t-il qu'un petit nombre d'ames privilégiées, qui parviennent à cette vertu sublime, d'être vraiment généreux par principes.

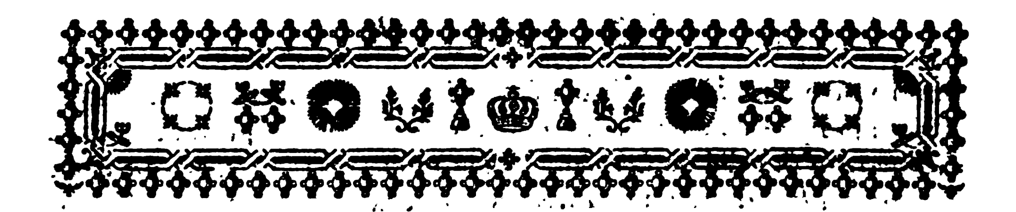
Voilà tout ce que j'ai pû découvrir sur l'origine psychologique & sur les causes de la vertu. Je m'étois proposé d'abord d'examiner aussi quelles sont les causes de cette corruption de l'ame, qui produit la méchanceté & tout le mal moral opposé à la vertu ; de voir si, outre l'absence de la vertu, il y a encore des causes positives du crime. Après tout cela, je voulois m'étendre, autant que cela seroit nécessaire, sur les conséquences pratiques que ces recherches peuvent fournir. Mais je réserve ces matieres à un autre tems.



MÉMOIRES

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE BELLES-LETTRES.



DISSERTATION

SUR

LES QUADES.

PAR MR. DE FRANCHEVILLE.

Au second siecle de l'Ere Chrétienne, l'an 174, l'Empereur Marc Aurele Antonin, successeur d'Antonin Pie, fit aux *Quades* une guerre remarquable par des circonstances extraordinaires que les Historiens en rapportent.

Comme ces circonstances souffrent à mon avis de grandes difficultés, je me suis proposé de les examiner. Mais, étant nécessaire auparavant de faire connoître les *Quades*, je commencerai par rechercher ce que c'étoit que ce Peuple & en quelle région il habitoit.

Un Jésuite du siecle passé, nommé le P. Lacarry, a prétendu dans son Histoire des Colonies, que les *Quades* étoient originairement des Helvétiens, qui étant sortis des Gaules à la suite de Sigovese, vinrent avec divers autres Peuples Gaulois s'établir dans la Pannonie, 588 ans avant l'Ere Chrétienne. Mais c'est une conjecture absolument insoutenable; 1°. parce que les anciens Historiens qui ont parlé de l'expédition de Sigovese, ne nomment point les Peuples Gaulois qu'il mena dans la forêt Hercynie, selon Tite Live, ou qui ayant pénétré jusqu'à la Mer Adriatique, suivant Trogue Pompée dans Justin, allerent de là se loger dans la Pannonie. 2°. Cette preuve manquant, on ne

pourroit

pourroit trouver de la probabilité que dans le rapport des noms : mais il n'y a pas plus de distance entre le Ciel & la Terre qu'entre le nom d'*Helvétiens* & celui de *Quades*. Bien moins en trouveroit-on entre les noms d'*Helvétiens* ou d'*Helvecons*, & ceux de *Quades* ou de *Cattes*: mais il ne paroit pas que les Cattes ayent jamais habité la Pannonie, ni que les Helvecons ayent été du nombre des Quades. 3°. Si les *Quades* avoient été Helvétiens, étant Gaulois de nation, ils auroient conservé parmi eux la langue Gauloise, comme la conserverent d'autres Peuples qui étoient véritablement sortis des Gaules. Mais Tacite, qui le dit de ceux-ci, ne le disant pas des *Quades*, comme je le montrerai plus bas, il en faut conclure que les *Quades* étoient Germains & non Gaulois d'origine.

La premiere fois que leur nom paroît dans l'Histoire, c'est la 12ᵉ année avant l'Ere Chrétienne, 576 ans après l'Expédition de Sigovese ; & l'auteur qui parle de ce Peuple, est Sextus Rufus dans un Abrégé de l'Histoire Romaine qu'il dédia à l'Empereur Valentinien I. vers l'an 364. „Sous Jules & Octave Cesar, dit-il, on ouvrit une „route au travers des Alpes Juliennes. La défaite de tous les Peuples „des Alpes fut suivie de la soumission des Provinces Noriques. La „réduction de Baton Roi des Pannonfens entraîna celle des Pannonies. „Les Amantins entre le Save & le Drave étant domtés, la région du „Save & la Pannonie Seconde se rendirent. Les *Marcomans* & les „QUADES furent chassés des lieux de la Valerie, qui sont entre le „Danube & le Drave. La barriere de l'Empire entre les Romains & „les Barbares, fut portée par Auguste dans la Vindélicie, le Norique, „la Pannonie & la Moesie." La Valérie d'où ces Historien dit que les *Quades* furent chassés, étoit, au rapport d'Ammien Marcellin, une partie de la Pannonie, qui avoit été ainsi nommée en l'honneur de Valerie fille de Dioclétien, & femme de Galere Armentaire que son beau-pere déclara César l'an 291. Surquoi Beatus Rhenanus, au Livre I. de son Traité de la Germanie, page 210, a pris cette Province pour la Croatie : mais il se trompe évidemment, en ce que la Croatie n'est point entre le Danube & le Drave, [illegible]

mais

mais entre le Save & la Mer Adriatique; ce qui ne convient nullement à la Valerie, qui étant située entre le Drave & le Danube, ne pouvoit être que la basse Baviere, Autriche, ou basse Hongrie, & Stirie. Or les *Quades* étant chassés de là sous Auguste, il s'agit de savoir où ils se retirerent, & ce qu'ils devinrent jusqu'au tems de Marc Aurele.

Tacite, au Livre second de ses Annales, parle d'un Prince *Quade*, nommé *Vannius*, qu'en l'année 19 de l'Ere Chrétienne, Drusus, fils de Tibere, donna pour Roi aux Sueves, lesquels ayant pris les armes successivement en faveur de Maroboduus, Roi des Marcomans, & de Catualda son compétiteur, s'étoient vus obligés après le détrônement de ce dernier par Vibilius, Roi des Hermundures, de se retirer au-delà du Danube entre les rivieres de Marus & de Cusus, & c'est là où Vannius régna sur eux, c'est à dire, dans la haute Hongrie; mais il est difficile de décider, si ce fut du côté de la Moravie, entre le Danube & la Silésie, en prenant le Marus pour la Morave, ou du côté de la Transilvanie en le prenant pour le Marosch; parce que le Cusus qui pourroit lever la difficulté, est aujourd'hui inconnu. Cependant il est à présumer que Drusus ne donna aux Sueves un *Quade* pour Roi, qu'à cause qu'ils s'étoient retirés dans le voisinage des terres que les *Quades* occupoient alors, & que par conséquent ceux-ci, après avoir été chassés d'entre le Danube & le Drave, avoient passé, comme les Sueves, ce premier fleuve pour aller s'établir sur sa rive septentrionale, ou Germanique, du côté de la Boheme, de la Moravie & de la Silésie.

Après 31 ans de régne, Vannius fut détrôné l'an 50 par ses neveux, Vangion & Sidon, fils de sa soeur, ausquels s'étoit joint Jubilius Roi des Hermundures. C'est ce qu'on peut voir encore dans Tacite, au XII Livre de ses Annales: mais comme le détail de cette guerre ne donne aucune lumiere sur les pays qu'habitoient les *Quades* & les Hermundures, je ne m'y arrêterai point.

Pour avoir quelque idée de ces *Quades* & de leur pays, je passe à la description de la Germanie dans l'état où elle étoit l'an 98, trente-

 huit

huit ans après que Vangion & Sidon eurent détrôné leur oncle. Cette description est celle de Tacite, intitulée *De situ, moribus & populis Germaniæ*. „Les Hermundures, dit-il, Chapitre VII. ont chez eux „la source de l'Elbe, qui est un grand & célebre fleuve. Auprès des „Hermundures sont les Narisques, ensuite les Marcomans & les *Qua-* „*des*. Les Marcomans ont le plus de réputation & de forces; aussi „doivent-ils à leur valeur le pays qu'ils habitent, l'ayant conquis sur „les Boiens qui l'occupoient auparavant. Les Narisques & les *Qua-* „*des* eux-mêmes n'ont point dégénéré. C'est là comme le front de la „Germanie, du côté que le Danube la borde. Les Marcomans & les „*Quades* ont eu jusqu'à notre tems des Rois de leur nation, qui étoient „issus du noble sang de Maroboduus & de Tuder; mais à présent ils „en ont d'étrangers qui tirent toute leur force & puissance de l'auto- „rité des Romains, quoiqu'ils soient moins souvent aidés de nos armes „que de notre argent. Les Marsignes, les Gothins, les Osois & les „Buriens, qui couvrent les derrieres des Marcomans & des *Quades*, „ne leur sont point inférieurs. A l'habillement des Marsignes & des „Buriens, de même qu'à leur langue, on connoît qu'ils sont Sueves. „La Gauloise & la Pannonique qui sont celles des Gothins & des „Osois, montrent que ces deux Peuples ne sont point Germains. „D'ailleurs, étant regardés comme étrangers, ils sont sujets à des tributs „dont une partie leur est imposée par les Sarmates & une autre par les „*Quades*. Et ce qui est de plus honteux pour les Gothins, ils les em- „ployent à fouiller leurs mines de fer. Tous ces Peuples ont peu de „terrain découvert, la plupart vivant dans les bois & sur le haut des „montagnes qui entrecoupent toute la Suévie."

Il y a plusieurs remarques à faire sur ce récit. Premiérement, on y apprend que les Hermundures ayant chez eux la source de l'Elbe, habitoient incontestablement la Boheme, mais ne l'occupoient pas toute entiere. Car, secondement, les Boiens qui lui avoient donné leur nom, en ayant été chassés par les Marcomans qui prirent leur place, il s'ensuit que les Marcomans en occupoient aussi une partie, & non seulement eux, mais même les Narisques, puisque ceux-ci demeuroient

entre

entre les Hermundures & les Marcomans. 3°. A l'égard des *Quades*, qui étoient à côté de ces derniers, s'ils ne tenoient pas toute la Moravie, ils la partageoient avec eux; mais il y a apparence qu'ils s'étendoient au-delà de la Morave dans la haute Hongrie. Car 4°. pour que les Gothins & les Osois pussent se soumettre à payer des tributs tout à la fois aux *Quades* & aux Sarmates, il falloit qu'ils fussent dans le voisinage de la petite Pologne, mais aussi resserrés d'un côté par les *Quades* que d'un autre par les Polonois: ainsi les *Quades* s'étendoient à mon avis jusques dans le Palatinat de Presbourg, entre le Danube, les Monts Carpathiens qui séparent la Hongrie de la Pologne, & la Silésie dans laquelle les Gothins & les Osois avoient leur habitation. 5°. Dans cette position il est aisé de concevoir comment les Gothins étoient à portée de travailler aux mines de fer des *Quades*, qui étoient, comme elles sont encore, dans les Monts Sarmatiques qui séparent la Moravie de la haute Silésie. 6°. Enfin les *Quades*, n'étant ni Gaulois comme les Gothins, ni Pannoniens comme les Osois, puisqu'ils traitoient ces deux Peuples en étrangers par les tributs & les corvées qu'ils exigeoient d'eux, il est évident que ces *Quades*, de même que les Marcomans, les Hermundures & les Narisques, étoient Germains de nation & d'origine, & sans doute du nombre des Sueves, comme les Marsignes & les Buriens; & que c'est par cette raison que Tacite désigne les provinces de ces divers Peuples par le terme général de *Suévie*, contrée qu'il dit être entrecoupée de montagnes, ce qui convient fort bien à la Boheme & à la Moravie.

Arrien de Nicomédie écrivoit l'an cent dix, 12 ans après Tacite. Au Livre I. de son Histoire des Expéditions d'Alexandre le Grand, parlant du Danube à l'occasion d'une guerre que ce Prince fit aux Getes, il dit „que ce fleuve est le plus grand de tous ceux qui sont „en Europe; que son cours étant très long, il baigne quantité de terres; „qu'il passe chez des Peuples belliqueux, qui sont des Germains pour „la plupart, chez lesquels on trouve les sources de ce fleuve; que „les plus reculés sont les *Quades* & les Marcomans; ensuite les Jazyges, Peuple Sarmate; après eux les Getes, puis un grand nombre

 „d'autres

„d'autres Sarmates, & en dernier lieu les Scythes qui voyent le Danu„be tomber chez eux par cinq bouches dans le Pont Euxin." Ce récit n'ajoute rien à celui de Tacite, mais il ne le contredit pas, & cela suffit.

Enfin, l'Astronome Claude Ptolémée, qui vivoit peu avant l'Empereur Marc Aurele Antonin, ou même de son tems selon quelques uns, acheve de prouver que les *Quades* continuoient d'être dans la même contrée où Tacite les avoit trouvés. Il dit au second Livre de sa Géographie, dans la IVe Table de l'Europe intitulée de la grande Germanie,

que les sources de l'Elbe sont à - -	39 D. o M. de Long.	50 D. o M. Lat.
que les Monts Sudetes sont à - - -	35 . - 50 - - -	40 - 50 - - -

que sous ces monts est la forêt Gabrita, qui est séparée des Monts Sarmatiques par la forêt d'Hercynie; qu'au dessus de cette forêt sont les Visburgiens; que depuis la naissance des Monts Abnobées au dessus des Sueves habitent les Casvarois, puis les Nertoreanes, ensuite les Dandutes sous lesquels sont les Turonois & les Marvingues qu'on prend pour les Marsignes de Tacite; qu'au-dessus des Monts Sudetes sont les Teuriochemes, & au-dessous des monts les Varistes qu'on croit être les Narisques de Tacite; qu'ensuite est la forêt Gabrita; que sous les Marvingues sont les Curions, les mêmes que les Buriens de Tacite, après eux les Choetvorois, & jusqu'au Danube les Parmæcamps; que sous la forêt Gabrita sont les Marcomans, sous eux les Sudenois, & jusqu'au Danube les Adrabæcamps; que sous la forêt d'Hercynie sont les *Quades* ayant sous eux des mines de fer & la forêt Luna sous laquelle est la grande nation des Boemois jusqu'au Danube, ayant pour plus proches voisins le long du fleuve les Teracatries, & les Rhacates qui habitent les champs. Après cela viennent les noms de 94 villes de Germanie, graduées suivant leur longitude & latitude. Mais, comme ce n'est que par conjecture qu'on croit y trouver celles qui étoient aux Quades, je me dispenserai de les nommer, de peur de donner des choses fausses ou incertaines pour des vérités.

Il

Il suffit donc d'avoir montré que les *Quades*, Germains & non Gaulois de nation ou d'origine, habiterent d'abord entre le Danube & le Drave, contrée qui faisoit partie de l'ancienne Germanie avant que les Romains l'eussent assujettie & nommée Pannonie; qu'Auguste les ayant chassés de cette premiere habitation, ils allerent s'établir de l'autre côté du Danube, principalement en Moravie; & que c'est là que Marc Aurele Antonin doit avoir porté ses armes, ce qu'il ne pouvoit faire qu'en traversant lui-même ce fleuve, pour passer des terres de l'Empire dans ce que Suétone & Eutrope appellent *Barbaricum*, le pays des Barbares.

Or l'on prétend que cette guerre fut accompagnée d'un événement singulier, que rapporte l'Abrégé de l'Histoire Romaine de Dion Cassius par Jean Xiphilin, Patriarche de Constantinople, qui vivoit vers l'an 1080. „Marc, dit cet Auteur, ayant soumis les Marco-„mans & les Jazyges, eut ensuite une forte guerre avec ceux qu'on „appelle *Quades*. Dans cette guerre il obtint la victoire contre son „espérance ou plutôt par un bienfait du Ciel. Car les Romains se „trouvant dans un très-grand péril, furent conservés miraculeusement „par la permission divine. Les *Quades*, qui les tenoient enfermés „dans des lieux fort difficiles, ne se pressoient point de les attaquer, „comptant que la chaleur & la soif seroient suffisantes pour les faire „périr, parce que dans cette position il leur étoit impossible de se pro-„curer de l'eau. Mais, comme les Romains investis de tous côtés par „les Barbares & tourmentés par les maladies, les blessures, l'ardeur du „Soleil & le besoin de boire, étoient réduits à cette extrémité de ne „pouvoir ni combattre ni se retirer ailleurs, tout à coup le ciel se cou-„vre, les nuées s'épaississent, & par une faveur divine il tombe une „pluie des plus abondantes. On dit, (c'est toujours Xiphilin qui „parle,) on dit qu'un Enchanteur Egyptien, nommé Arnuphis, que „Marc avoit après de lui, ayant recours à l'art Magique, invoqua „Mercure, & les autres Démons de l'air, & que par leur moyen il „suscita cette pluie. C'est ce que Dion rapporte, mais sans doute il „en impose, soit à dessein, soit pour avoir été trompé lui-même.

„Cependant il est à croire qu'il ne parle pas ici de bonne foi, puisqu'il „étoit très-bien informé qu'il y avoit une *Légion appellée la Foudroyante*, laquelle n'avoit eu ce nom pour aucune autre raison que pour „avoir conjuré le Ciel par l'ardeur de ses prieres, & procuré miraculeusement la conservation de l'armée Romaine, & la ruine de celle „de leurs ennemis. Arnuphis ne fut pas un Magicien; car l'histoire „ne reproche point à Marc d'avoir eu commerce avec les Magiciens. „Quant à moi, voici là-dessus mon sentiment. Marc avoit une Légion de Soldats de Mélitene, qui étoient tous Chrétiens. Le Préfet „du Prétoire vint le trouver au moment où il ne savoit quel parti prendre, & étoit dans une grande appréhension pour toute l'armée. „On dit qu'il lui représenta qu'il n'y avoit rien que les Chrétiens ne „pussent obtenir par leurs prieres, & qu'il avoit dans son armée une „Légion d'hommes de cette espece. Aussitôt Marc leur ordonna d'invoquer leur Dieu; & eux l'ayant fait, Dieu les exauça sur le champ, „frappant de la foudre les ennemis, & envoyant aux Romains une „pluie propre à les soulager. Marc, surpris d'un tel événement, „publia un Edit en faveur des Chrétiens, & donna à la pieuse Légion „le nom de *Fulminatrix*. On dit même qu'il y a une Lettre de Marc „sur ce sujet. Les Grecs savent que cette Légion s'appelle en leur „langue Κεραυνοβολος, & en sont témoins; mais ils ne disent point „par quelle raison elle a été ainsi appellée. Dion ajoute que, dès que „la pluie tomba, les Romains la reçurent à bouche béante, ayant le visage tourné vers le ciel; ensuite tendant leurs casques & leurs boucliers, ils burent autant qu'ils en eurent envie, & désaltérerent leurs „chevaux. Etant attaqués en même tems par les Barbares, ils buvoient & combattoient tout à la fois. Plusieurs qui étoient blessés, „mêloient leur sang à l'eau qu'ils recevoient dans leur casque. Pressés „par leurs ennemis, lorsque le plus grand nombre étoit occupé à se „désaltérer, ils auroient beaucoup souffert, si une forte grêle & de „grands coups de foudre n'eussent accablé l'armée des *Quades*. Ainsi „on pouvoit voir dans un même endroit de l'eau & du feu tomber à la „fois du ciel, & par ce moyen les uns boire & réparer leurs forces, „en

„en même tems que les autres étoient brûlés & consumés. Car le „feu n'atteignoit point les Romains, ou si par hazard il en rejaillissoit „sur eux, il s'éteignoit à l'instant. La pluie ne servoit de rien aux „Barbares: au contraire elle sembloit se changer contre eux en huile „& servir d'aliment au feu qui les dévoroit. De sorte que tout mouil- „lés de la pluie ils demandoient de l'eau, & se blessoient eux-mêmes „pour éteindre le feu avec leur sang. Il y en eut qui vinrent se réfugier „au camp des Romains, pensant que l'eau ne leur pouvoit être salutai- „re ailleurs. Marc eut pitié d'eux. Il fut à cette occasion proclamé „*Imperator* pour la septiéme fois par les soldats. Quoiqu'il n'eût pas „coûtume d'accepter ce titre avant qu'il lui fût déféré par un décret du „Sénat, cependant il ne le rejetta point, l'ayant comme reçu du Ciel, „dequoi il informa aussi le Sénat. Faustine sa femme fut à cette mê- „me occasion surnommée *Mere des Armées*."

Voilà l'événement que rapporte Xiphilin, & que je me suis proposé d'examiner dans cette Dissertation. Pénétré de la grandeur de Dieu, convaincu de sa toute-puissance & de la possibilité des miracles par l'évidence de ceux qu'il opere continuellement pour la conservation de l'Univers, je n'ai garde de les combattre: mais plus je les croi & les respecte, plus je me sens animé à venger la Majesté Divine d'un attentat du mensonge qui ne peut être qu'injurieux à sa gloire.

Premiérement, je reconnois que le Patriarche Xiphilin n'a point été l'inventeur de cette fable, puisqu'avant lui plusieurs autres en avoient parlé: témoin Paul Orose au Ve siecle, Eusebe de Césarée au IVe, & Tertullien au IIIe. Mais je dis que, quelque respectables que soient d'ailleurs tous ces Ecrivains, leurs témoignages ne peuvent subjuguer la foi sur un fait dont les circonstances principales sont palpablement fausses.

Je ne m'arrêterai qu'à celle qui regarde la Légion, aux prieres de laquelle Xiphilin attribue le miracle, & qu'il dit avoir eu par cette raison le nom de *Fulminante*, ou *Foudroyante*. Pour peu qu'on y fasse attention, on sentira aisément l'absurdité de cette circonstance. Le très docte Jean-George Grævius, dans son Trésor des Antiquités Romaines,

maines, Tom. 7. p. 1425, rapporte à l'Empereur Vespasien l'établissement de cinq Légions nouvelles, dont il nomme les deux premieres: „LEGIO XII. FULMINATRIX, LEGIO XV. APOLLINA„RIS IN CAPPADOCIA. *Tranquil. Dion.*" Or Vespasien mourut l'an 79, près de 100 ans avant le prétendu foudroyement des *Quades*. Mais dans le fond Grævius paroît avoir ici manqué d'exactitude, citant Suétone & Dion; car Suétone parle bien des Légions que Vespasien ajouta à la Cappadoce, pour réprimer les courses des Barbares: *Cappadociæ propter assiduos Barbarorum incursus legiones addidit*, mais il ne marque ni le nombre ni les noms de ces Légions nouvelles. Et quant à Dion, au Livre LV. il nomme à la vérité deux Légions que Vespasien établit & plaça, savoir, l'*Auxiliaire II.* dans la basse Pannonie & la *Flavia IV.* dans la Syrie, mais il ne parle point des Légions que Vespasien mit dans la Cappadoce, si tant est que le passage de Suétone doive se prendre en ce sens; & ces dernieres Légions devoient être d'autant moins la *Fulminatrix* & l'*Apollinaris*, qu'au rapport du même Dion, elles étoient établies toutes deux dès le tems d'Auguste, & stationnées, comme Grævius en convient lui-même, savoir l'*Apollinaris* dans la Pannonie, & la *Fulminatrix* dans la Syrie; d'où il est apparent que l'Empereur, non Vespasien, mais Tibere, les transféra dans la Cappadoce, lorsqu'il fit de ce Royaume une Province Romaine à la mort du Roi Archélaüs, la 18[e] année de l'Ere Chrétienne. Et ces deux Légions resterent apparemment dans cette station, suivant l'usage d'alors, jusqu'au tems de l'Empereur Alexandre Sévere, comme Dion son contemporain le remarque à l'endroit déja cité: *Duodecima in Cappadocia* FULMINIFERA. *Decima quinta ab* APOLLINE *cognominata (aliàs* APOLLINARIS*) in Cappadocia.* D'ailleurs on connoît les noms de toutes les Légions qui furent créées depuis Auguste jusqu'à Marc Aurele Antonin, & l'on peut assurer qu'on n'y en trouvera aucune du nom de Mélitine. Ce n'est qu'environ 260 ans après cet Empereur, sous le régne de Théodose le Jeune, en 437, que la Notice des Dignités de l'Empire d'Orient, rapportée au même Volume de Grævius, page 1737, marque sous la

dispo-

disposition du Duc de l'Arménie, le Tribun de la XVe Légion Apollinaire ayant sa station à Satala ville de la petite Arménie vers Trébisonde, & celui de la XIIe Légion *Fulminea* ayant la sienne à Mélitene, ville capitale de la même Arménie vers l'Euphrate: *Præfectura Legionis quintæ decimæ Apollinaris Satalæ*: *Præfecturæ Legionis duodecimæ* FULMINEÆ MELITENÆ. A quoi l'on peut joindre, si l'on veut, ce que dit Siméon Métaphraste, dans ses Vies des Saints au 9 de Janvier, parlant des Edifices bâtis par l'Empereur Justinien I. & entr'autres de l'Eglise de St. Irénée Martyr: „Là sont renfermées les reliques „de quatre saints personnages du tems passé lesquels étoient des Sol„dats Romains enrôlés dans la *XIIe Légion qui avoit autrefois sa sta„tion à Mélitene*, ville métropolitaine de l'Arménie seconde:" *Ibi recondita sunt reliquiæ jam olim virorum sanctorum quatuor, qui Romani milites in XII Legione erant descripti, quæ in urbe secundæ Armeniæ metropoli Melitena quondam fuerat constituta.* Voilà ce que Métaphraste écrivoit à Constantinople dans le Xe siecle, & il étoit possible que 467 ans auparavant, sous l'Empire de Théodose le Jeune, les quatre soldats eussent été Chrétiens & eussent servi dans la douziéme Légion ayant pour lors sa station à Mélitene. Je suis même fort trompé si ce n'est pas sur ce fondement que Xiphilin écrivant 176 ans après Métaphraste son compatriote, a supposé que cette douziéme Légion étoit toute Chrétienne dès le tems de Marc Aurele Antonin, étant composée selon lui d'habitans Chrétiens de Mélitene, & que par cette raison elle portoit le nom de Mélitene avant que Marc Aurele lui eût donné le nom de *Fulminante*. Mais ces suppositions sont mal-fondées, 1°. en ce que cette douziéme Légion & la quinziéme appellée l'Apollinaire, qu'on trouve toutes deux dans la petite Arménie sous l'Empire de Théodose le Jeune, n'y étoient point encore du tems de Dion, 50 ans après Marc Aurele Antonin, puisqu'il assure qu'elles avoient l'une & l'autre leur station dans la Cappadoce, où elles avoient été placées par Tibere, 156 ans avant le prétendu miracle. 2°. Vouloir que toute une Légion ait été Chrétienne du tems de Marc Aurele Antonin parce qu'il s'en trouve quatre soldats qui étoient Chrétiens 260 ans après,

 sous

sous un Empereur pareillement Chrétien, tel que Théodose le Jeune, c'est un raisonnement vicieux, faux & inconséquent. 3°. *Prétendre que* cette Légion étoit Chrétienne parce qu'elle étoit composée d'habitans Chrétiens de Mélitene, c'est confondre visiblement cette ville d'Arménie avec l'Ile de même nom située dans la Mer Adriatique, & qui pouvoit être Chrétienne non seulement du tems de Marc Aurele Antonin, mais même auparavant, surtout si c'est là plutôt qu'à Malte, où St. Paul allant à Rome fut jetté par la tempête, & fit les miracles dont il est parlé dans les Actes des Apôtres. De plus, c'est ignorer que les Légions étoient formées de seuls Citoyens Romains; que les noms nationaux de Scythique, de Macédonique, de Gallique, de Parthique, & autres semblables qu'elles avoient, leur étoient venus, non de ce qu'elles avoient été formées de soldats de ces Nations, mais de ce que ces Provinces étoient celles à la réduction desquelles on les avoit employées, ou dans lesquelles elles avoient eu leur premiere station. 4°. Enfin, si la douziéme Légion n'eut sa station à Mélitene que plusieurs siecles après Marc Aurele Antonin; si cette Légion fut la seule appellée *Fulminante*, & qu'elle ait porté ce nom dès le tems d'Auguste, comme on le prouve invinciblement, n'est-il pas de la derniere évidence que ce même nom ne lui a point été donné par Marc Aurele Antonin; & que par conséquent le prétendu évènement auquel on l'attribue, est une pure fable?

Après une réfutation si convaincante, je laisse à juger s'il est vraisemblable que des Chrétiens ayent été enrôlés pour tels dans une armée toute Païenne; Qu'un Préfet du Prétoire, sans doute très-idolâtre, & naturellement leur ennemi, les ait annoncés comme des gens à miracle à un Empereur également Païen & non moins ennemi des Chrétiens, contre lesquels il avoit excité, au commencement de son régne l'an 162, une violente persécution qui duroit encore; ou que dans ce même tems il ait toléré cette Légion Chrétienne; ou qu'elle ait professé le Christianisme à son insçu; en un mot, que lui & ce nombre qu'il y avoit de Païens dans son armée ayent pu recourir ou vouloir

donner

donner leur confiance aux prieres d'une Secte pour laquelle ils n'avoient pas moins de mépris que d'aversion.

„Mais, dit-on, qu'on voie les Lettres de Marc Aurele, ce „très-grave Empereur, dans lesquelles il atteste avoir éteint cette soif „qu'il avoit dans la Germanie, par les prieres des Soldats Chrétiens. „Et non content de les avoir exemptés de toute punition publique, il „a en même tems condamné publiquement leurs délateurs à des peines „très-rigoureuses." C'est ainsi que Tertullien dans son Apologétique, & après lui Orose, au Livre VII. Chapitre XV. de son Histoire, & Xiphilin dans le récit qu'on a vu plus haut, provoquent au témoignage de Marc Aurele Antonin même. Mais, si le fait qu'il atteste est manifestement une fable, comme je l'ai prouvé, ne s'ensuit-il pas nécessairement que ce témoignage est lui-même une piece fausse & supposée? Commençons par en donner une Traduction fidele sur le texte qu'on en trouve tant en Grec qu'en Latin dans les Oeuvres de St. Justin Martyr, à la fin de sa seconde Apologie pour les Chrétiens, Edit. de Francfort sur l'Oder, 1686. page 101.

„Epitre *de l'Empereur Marc au Sénat Romain, par laquelle „il atteste que les Chrétiens ont été cause de la Victoire des Ro„mains contre les Barbares.*

„L'Empereur César M. Aurele Antonin, Germanique, Parthi„que, Sarmatique, au Peuple Romain & au Sacré Sénat. Salut. „Je vous ai fait savoir l'importance de ma résolution & de mon entre„prise. Elle a été suivie dans la Germanie d'un excès de travaux & de „peines, nous étant trouvés d'abord sur la frontiere en grand danger; „& opprimés par 74 dragons, au neuviéme milliaire dans le *Cotinum*. „Les Espions qui n'étoient pas éloignés, nous en avertirent, & pareil„lement Pompeianus, Préfet de nos troupes militaires, nous informa „de ce qui étoit déja venu à notre connoissance. J'étois aussi pressé „par une grande multitude, ayant avec moi les troupes choisies de la „premiere Légion, de la dixiéme, & de la Gemina, mêlées de Fe-

„rentariens. Lors donc qu'on eut annoncé qu'il y avoit là une armée
„de neuf-cent ſoixante & dix mille hommes, moi de mon côté m'en-
„quérant de mes forces, je fis faire le dénombrement des troupes &
„les comparant à la multitude des barbares & ennemis, j'ordonnai
„qu'on fît des prieres aux Dieux de la Patrie. Et voyant mes forces
„réduites à l'étroit, j'appellai ceux qui ont chez nous le nom de Chré-
„tiens, & par la recherche qui en fut faite, j'en trouvai un grand
„nombre, & j'en fus d'autant plus animé contre eux. Mais c'eſt ce
„que je n'aurois pas dû faire, à cauſe de la vertu que j'ai reconnue
„depuis dans ces gens-là, & qui fait qu'ils ne commencent point un
„combat par une décharge de traits & d'autres armes, ni par le ſon
„des trompettes; cela leur étant déſagréable & odieux à cauſe du Dieu
„qu'ils portent dans leur conſcience. C'eſt pourquoi, connoiſſant ces
„hommes que nous avions ſoupçonnés être *Athées* & ennemis des
„Dieux, il eſt juſte qu'ils ayent la liberté d'avoir dans leur conſcience
„le Dieu qu'ils y ont mis & qui y habite. Car ſe jettant par terre ils
„ont prié, non ſeulement pour moi, mais auſſi pour toute l'armée qui
„étoit là préſente, afin de nous procurer du ſoulagement dans la faim
„& la ſoif que nous ſouffrions, n'ayant pas pris d'eau depuis cinq jours
„qu'elle nous manquoit: car nous étions au milieu de la Germanie &
„aux frontieres des ennemis. Mais auſſitôt qu'ils ſe furent jettés par
„terre, & qu'ils eurent invoqué dans leur priere un Dieu qui m'étoit
„inconnu, en ce moment il tomba du Ciel une pluie qui fut pour
„nous très-rafraîchiſſante; mais pour les ennemis qui menaçoient les
„Romains, c'étoit une grêle toute de feu. De ſorte que cette priere
„attira la préſence d'un Dieu ſupérieur à tout & invincible. Faiſant
„donc un commencement là-deſſus, nous permettons à ces Chrétiens
„de l'être, de peur qu'ils ne viennent à leurs fins en employant ce gen-
„re d'armes (leurs prieres) contre nous. C'eſt pourquoi, de deſſein
„prémédité, je ſtatue que perſonne n'ait la licence d'accuſer un de ces
„gens-là ſur ce qu'il eſt Chrétien. Et ſi quelqu'un eſt trouvé défé-
„rant un Chrétien par la raiſon qu'il eſt Chrétien, je veux que le Chré-
„tien déféré, qui s'avoue être Chrétien, ne ſe trouvant accuſé d'au-
„cun

„un autre crime que d'être Chrétien, agisse manifestement comme „tel; & que son délateur soit brûlé tout vif. Mais le Chrétien ayant „confessé, & étant par conséquent à ce titre en toute sûreté, le Préfet „de la Province, par rapport à cette profession, ne le mettra point en „pénitence ni dans un état de servitude. Je veux aussi que ces choses „soient confirmées par un décret du Sénat, & j'ordonne que ma pré-„sente constitution soit affichée dans la Place de Trajan pour qu'elle „puisse être lue. En même tems, le Préfet Verasius Pollion aura soin „qu'elle soit envoyée dans chaque Province. Quiconque voudra s'en „servir & en avoir un exemplaire, qu'il le reçoive de lui en toute liber-„té; car telle est notre intention."

Quoique cette Piece soit, comme j'ai dit plus haut, à la suite de la seconde Apologie de St. Justin, elle n'en peut tirer aucun avantage pour son autenticité; car, bien loin qu'il en ait fait mention dans cette Apologie, il a été si peu à portée de la connoître qu'il souffrit le martyre l'an 163, onze années avant le prétendu miracle.

Mais, trois ans après cet événement, savoir l'an 177, Athénagore, Philosophe Chrétien d'Athenes, fit aussi une Apologie ou Légation pour les Chrétiens. C'étoit le tems où la Lettre de Marc Aurele Antonin devoit avoir été écrite au Sénat, affichée dans Rome, distribuée & répandue dans la Grece comme dans l'Italie, & partout où il y avoit des Chrétiens, qui naturellement ne pouvoient pas manquer de se prévaloir de cette marque de protection & de la célébrer dans leurs Ecrits. D'ailleurs, ce qui est encore bien remarquable par rapport à l'Apologie d'Athénagore, c'est qu'elle est adressée à Marc Aurele Antonin même & à L. Aurele Commode son fils. Cependant, malgré toutes ces circonstances, il n'y dit pas un mot qui puisse faire entrevoir que cet Empereur eût accordé aux Chrétiens la liberté ou la tolérance de leur religion, ni écrit en leur faveur au Sénat. Au contraire, représentant aux deux Empereurs qu'ils permettoient à tous les Peuples de suivre leurs coutumes, quelque ridicules qu'elles fussent; aux uns, d'adorer des hommes; aux autres, de rendre des honneurs

 divins

divins à de simples animaux; il ajoute: „Tous se ressentent de votre „douceur, & sont traités avec la même bonté: toutes les villes sont „en possession de leurs droits; toute la Terre, remplie des bienfaits de „votre sagesse, jouit de la plus profonde paix. Il n'y a que nous seuls „Chrétiens, pour qui vous n'avez aucun égard. Nous qui ne fai-„sons aucun mal, qui vous obéissons, qui observons vos loix comme cel-„les de Dieu même, vous souffrez que nous soyons tourmentés, en-„levés, mis en fuite." Et quelques lignes plus loin: „Ainsi nous „vous conjurons d'avoir quelque attention pour nous, afin que nos „calomniateurs cessent de nous faire égorger." Assurément ce langa-ge n'est pas celui qu'auroient tenu des gens que Marc Aurele Antonin avoit pris sous sa protection, & autorisés à professer publiquement leur religion.

Il y a plus: En la même année 177, la persécution contre les Chrétiens augmenta. On ne peut lire qu'avec douleur le récit des cruautés qu'on exerça sur les Eglises de Lyon & de Vienne. „On „n'avoit point encore vu jusqu'alors, dit Sulpice Severe, des Martyrs „dans ces deux Provinces, parce que la Religion s'étoit établie plus „tard au delà des Alpes, que dans les autres lieux. Les deux Eglises „qui y étoient alors fort nombreuses, furent presque entiérement dé-„truites par la violence des persécuteurs. Le Gouverneur de Lyon „fit rechercher & arrêter tous les Chrétiens qu'il put découvrir. Plu-„sieurs furent condamnés & exécutés, d'autres furent exposés aux bê-„tes, & plusieurs périrent dans la prison. L'Evêque Pothin fut de ce „nombre. Il tomba entre les mains des persécuteurs qui le traînerent „par les rues, & le firent porter par les Soldats jusqu'au tribunal du „Gouverneur, qui lui demanda, *qui étoit le Dieu des Chrétiens*; & à „quoi l'Evêque répondit: *Vous le connoîtrés, si vous en êtes digne.*" demande & réponse qui n'auroient pas été faites, si le Dieu des Chré-tiens eût opéré trois ans auparavant un si grand miracle, que l'Empe-reur auroit reconnu, dont il auroit même rendu gloire à ce Dieu, & en considération duquel il eût permis ou toléré le Christianisme. En-fin, ce fut aussi dans le même tems que parut l'Apologie de Théophile,

Pa-

Patriarche d'Antioche, dans laquelle on voit que les Chrétiens de l'Eglise Grecque n'étoient pas mieux traités. „Ils ont, dit-il, persé-„cuté jusqu'ici les Chrétiens qui adorent le vrai Dieu, & ils ne cessent „point encore de les persécuter actuellement, de les lapider, de les tuer „par l'épée, de les battre de verges de la maniere la plus cruelle & la „plus inhumaine." Il n'étoit donc pas vrai que Marc Aurele Antonin eût écrit au Sénat en faveur des Chrétiens. Par conséquent la Lettre qu'on lui attribue est aussi fausse que le miracle qui en fait le fondement.

En effet il ne faut avoir qu'une médiocre sagacité pour s'appercevoir de la supposition.

1°. Marc Aurele Antonin n'auroit point publié parmi ses titres celui d'*Augustus*, ni l'année de son Tribunat, *Tribunitiæ Potestatis*, qu'on trouve dans toutes ses médailles & ses Inscriptions, exprimé par ces Lettres *Tr. P.* avec la date IIII, XVI, ou autres, laquelle étoit en 174, XXVIII depuis le 25 Fevrier. Cette date étoit d'autant plus essentielle, que c'est uniquement par là qu'on peut connoître celle de la Lettre, parce que l'année de sa Puissance Tribunitienne étoit celle de son avénement à l'Empire.

2°. Dans l'adresse de cette Lettre il nomme le Peuple Romain avant le Sénat, ce qui est absolument contraire à l'usage qui étoit de dire, *Senatus Populusque Romanus*.

3°. Il traite le Sénat de Sacré, *ἱερᾷ συγκλήτῳ*. C'est précisément le même terme dont St. Justin se sert dans l'adresse de sa seconde Apologie, & ce terme étoit sans doute très-convenable de la part d'un inférieur & d'un suppliant à l'égard du Sénat, mais assurément il est très-déplacé dans l'adresse d'un Rescrit de Marc Aurele Antonin. Je doute qu'il s'en trouve un second exemple, soit de cet Empereur, soit de tout autre. C'étoit chez eux seuls que tout étoit sacré, le Palais *Sacrum Palatium*, le Domaine *Sacrum Patrimonium*, le Trésor *Sacrum Ærarium*, les Largesses ou les Finances *Sacræ Largitiones*. Mais

tout

tout cela ne fut véritablement en usage que chez les Empereurs Chrétiens, & au plutôt sous Constantin. Il y a donc grande apparence que celui qui a fabriqué cette Lettre, n'y a traité le Sénat de Sacré que parce qu'il avoit vu ce terme dans l'Apologie de St. Justin.

4°. Peut-on regarder autrement que comme une fable, la circonstance des 74 dragons par lesquels Marc Aurele Antonin dit avoir été opprimé lui & son armée dans le *Cotinum*, qui répond apparemment aux Alpes Cottiennes, mais qui sont désignées par un terme barbare qu'on ne trouve dans aucun Auteur Latin.

5°. Si Pompeianus n'a signifié à Marc Aurele Antonin que des choses qui lui étoient déja connues, c'est une circonstance qui ne méritoit pas de trouver place dans sa Lettre; & elle ne peut y avoir été fourrée si grossiérement que pour colorer la supposition. Pompeianus étoit gendre de M. Aurele Antonin; mais Pompeianus étoit Consul l'année même que cette prétendue Lettre fut écrite, & d'ailleurs son véritable nom étoit Claudius Pompeianus, suivant Jules Capitolin & Lampride. Est-il à croire que Marc Aurele Antonin ne l'eût désigné, ni par sa qualité de Consul, ni par son double nom?

6°. Les Légions que Marc Aurele Antonin dit avoir eûes dans cette guerre sont la premiere, la dixiéme & la Gemina. Mais de tout tems il y eut 4 Légions premieres, 2 dixiémes & 4 Gemina. Les quatre premieres étoient l'Italica, la Minervia, l'Adjutrix & la Parthica. Des deux dixiémes l'une étoit la Fretensis, & l'autre une des Gemina. Et à l'égard des quatre qui portoient ce dernier nom, c'étoit, outre cette dixiéme, une des deux septiémes, la treziéme & la quatorziéme. C'est ce qu'on prouve par la Liste suivante, tirée d'une ancienne colomne de marbre qui est à Rome dans le Capitole.

NOMINA

II. Augusta.	V. Macedonica.	XII. Fulminatrix.
II. Adjutrix.	III. Cyrenensis.	VII. Gemina.
IV. Scythica.	I. Minervia.	X. Gemina.
VI. Victrix.	II. Italica.	XV. Apollinea.
IV. Flavia.	Primaria.	III. Italica.
XVI. Flavia.	Martiobarbuli.	XIV. Gemina.
XX. Victrix.	VI. Claudia.	III. Gallicana.
VII. Claudia.	II. Trajana.	III. Parthica.
VI. Ferratensis.	XXX. Ulpia.	I. Parthica.
VIII. Augusta.	XIII. Gemina.	II. Parthica.
I. Italica.	III. Augusta.	Claudia, Pia, felix, fidelis.
X. Fretensis.	I. Adjutrix.	III. Felix.
XXII. Primigenia.		

Or, toutes ces Légions ayant un nom propre, avec leur nombre ordinal pour la plupart, & plusieurs portant le même nom, comment Marc Aurele Antonin auroit-il fait entendre au Sénat quelles étoient celles qu'il avoit avec lui, puisque, comme j'ai dit & comme on le voit aussi par cette Liste, il y en avoit quatre premieres, 2 dixiémes & quatre Gemina? Cela prouve que l'auteur de la Lettre ne connoissoit pas cette pluralité de Légions, croyant sans doute qu'il n'y en avoit qu'une premiere, une seconde, une troisiéme, ainsi des autres. Au reste, parmi les Légions qu'on suppose avoir servi dans la guerre de Marc Aurele Antonin, la Lettre ne fait point mention de la douziéme qui étoit l'unique *Fulminatrix*. Sur quel fondement donc le Patriarche Jean Xiphilin a-t-il métamorphosé en cette Légion sa prétendue Mélitene, qu'on ne trouve pas non plus dans cette Lettre?

7°. On porte l'armée des ennemis à 970 mille hommes: c'est un nombre visiblement outré, & Marc Aurele Antonin n'auroit pas été capable d'une telle exagération.

8°. Il n'étoit pas de sa prudence d'attendre qu'il fût devant une armée si prodigieuse pour reconnoître la disproportion de ses forces.

Il est dit plus haut qu'il avoit des espions; & à quelles fins, si ce n'étoit pour l'avertir de la grande supériorité des ennemis, de peur qu'il ne s'engageât témérairement à les aller attaquer chez eux avec des forces trop inégales; car il paroît en effet que son armée n'étoit que d'environ 20 mille hommes.

9°. Marc-Aurèle Antonin dit que lui & ses troupes n'avoient point pris d'eau depuis cinq jours: autre exagération! Ne diroit-on pas qu'il étoit dans les deserts de la Thébaïde ou dans les sables dévorans de l'Arabie? Mais non, c'est parce qu'il étoit *au milieu de la Germanie & aux frontieres des ennemis.* Pour parler plus juste, il falloit dire *au milieu des ennemis & aux frontieres de la Germanie;* car telle est en effet la situation de la Moravie qu'habitoient les *Quades.* Cette bévue grossiere jointe à tant d'exagérations fait voir que l'Auteur de cette Lettre étoit aussi grand hableur que mauvais Géographe.

10°. Marc Aurele Antonin est convaincu qu'il doit son salut & celui de l'armée Romaine à des gens de bien, qui portent dans leur conscience un Dieu redoutable, invincible; à qui rien ne peut résister. Marc Aurele reconnoît la vertu de leurs prieres, & craint qu'ils ne veuillent les employer contre lui: cependant Marc Aurele ne laisse pas de continuer à les persécuter, & cette persécution dure jusqu'à sa mort. Quelle contradiction! Mais non; il n'y en eut point dans sa conduite à leur égard, dès-là que sa prétendue Lettre n'est qu'une Piece fausse & supposée.

11°. Il paroît évidemment que l'Auteur de cette Lettre fut un Chrétien. Son style le trahit aussi bien que la rigoureuse punition que son ressentiment à l'égard des Paiens lui fait imaginer contre les accusateurs de sa secte. De plus, ce Chrétien doit avoir vécu, non du tems de Marc Aurele Antonin, puisque la Lettre n'a été connue d'aucun des Apologistes de la Religion Chrétienne qui ont écrit de son tems, mais du moins avant la fin du second siecle, puisqu'elle est citée par Tertullien qui florissoit au commencement du troisiéme. D'ailleurs, il est

fort

fort apparent que ce même Auteur Chrétien fut un Grec, pour deux raisons; la premiere à cause que le seul texte ancien qu'on en trouve, est en Grec & à la suite d'un Pere Grec, qui est, comme j'ai dit, St. Justin le Martyr, car le Latin qui y est joint, est une version moderne de Jean Lang. La seconde raison est qu'il s'y rencontre le mot d'Athée ἄθεος, qui n'a passé des Ecrivains Grecs chez les Latins qu'avec la Religion Chrétienne. Enfin, comme il est très-sûr que si Marc Aurele Antonin avoit écrit la Lettre au Sénat, il l'auroit écrite en Latin & n'y auroit point employé le mot d'*Athée* que les Latins n'avoient point encore, & qui étoit pour eux un être de raison; il est indubitable aussi que cette Lettre auroit été connue de ceux qui ont écrit l'Histoire de cet Empereur. Or il est aisé de montrer le contraire.

Les seuls qu'on puisse regarder comme les Historiens de Marc Aurele Antonin, sont Dion Cassius & Jules Capitolin.

Dion, quoique Grec, est un des plus exacts Ecrivains qui ayent traité l'Histoire Romaine. Il vivoit sous l'Empire d'Alexandre Sévere, 50 ans après Marc Aurele Antonin. On trouve chez lui des détails très-curieux, & bien des faits importans, que les Historiens Latins ont négligés ou altérés. Mais, par une fatalité déplorable, son Histoire est une de celles qui se sont le plus ressenties de l'injure des tems; puisque de 80 Livres dont elle étoit composée, nous avons perdu les 34 premiers & ne possédons de 20 autres que quelques fragmens. C'est dans ces derniers Livres que se trouvoit malheureusement la vie de Marc Aurele Antonin. Ce qui pourroit dédommager un peu de cette perte, ce sont les abrégés que divers Littérateurs ont faits de son Ouvrage. Le plus considérable de ces Abrégés est celui de Xiphilin, depuis le 35e Livre de Dion jusqu'à la fin. Mais, dans le récit de ce qui regarde les *Quades*, il a tellement interpolé son Auteur, par le mêlange qu'il y a fait de ses propres idées, qu'il est difficile d'y démêler le simple texte de Dion. Tout ce qu'on en peut juger est que celui-ci avoit été persuadé que Marc Aurele Antonin s'étoit tiré comme par une espéce de miracle de sa guerre contre les

Quades; qu'enfermé par eux dans leurs montagnes il y avoit beaucoup souffert de la soif, & que dans cette extrémité il étoit survenu un orage qui l'avoit secouru: (il n'y a rien là de miraculeux:) mais on disoit de son tems, c'est à dire, du tems de Dion, que cette pluie avoit été procurée par un Magicien d'Egypte. Or il est clair que Dion ne se rend point garant de ce bruit, & que dans le fond c'étoit une fable, aussi peu fondée que celle du miracle que Xiphilin y a opposé. C'est tout ce que nous saurions du récit qu'avoit fait Dion, si un autre Compilateur Grec, nommé Théodose, n'en avoit tiré un Extrait qui s'est conservé & dont il ne paroît point que Xiphilin ait fait usage, parce qu'apparemment il manquoit déja de son tems dans le texte de son Auteur. Il s'agit précisément dans cet Extrait de la guerre de Marc Aurele Antonin contre les *Quades*. „Marc Antonin, (y „est-il dit,) resta dans la Pannonie pour être à portée de répondre aux „Ambassadeurs des Barbares. . . Quelques uns, comme les *Quades*, „demandoient la paix & ils l'obtinrent, tant parce qu'on vouloit les détacher des Marcomans, qu'à cause qu'ils avoient donné quantité de „chevaux & de bœufs, & promis de rendre tous les transfuges & les „prisonniers, fixés d'abord au nombre de treize mille & ensuite tout „ce qu'ils en avoient. Cependant il ne leur fut pas permis d'aller trafiquer chez d'autres & d'en fréquenter les marchez, de crainte que „par la même occasion les Marcomans & les Jazyges qu'ils avoient juré „de ne point recevoir, ni laisser passer sur leurs terres, ne se mêlassent parmi les *Quades*, pour venir avec eux observer ce qui se passoit „chez les Romains, & y faire emplette de ce qui leur manquoit. . . „Marc, ayant été trompé par les *Quades*, voulut absolument leur faire „la guerre. Car ils n'avoient pas seulement en ce tems-là secouru les „Jazyges comme alliés, mais auparavant ils avoient reçu chez eux les „Marcomans, lorsque pressés par les Romains & ne pouvant leur résister, ils s'étoient vus contraints de prendre la fuite. Outre cela, ils „n'exécutoient point les conditions de la paix; les prisonniers qu'ils „avoient rendus se réduisoient à un petit nombre, qui encore n'étoient „que des gens dont on ne pouvoit tirer aucune utilité. Car, pour

„ceux

„ceux qui étoient jeunes & robustes, s'ils en relâchoient, ils avoient „soin de retenir leurs plus proches parens pour les engager à revenir „d'eux-mêmes. D'ailleurs ils avoient chassé leur Roi Furtius, & mis „en sa place de leur propre autorité Ariogese. Or l'Empereur par „cette raison ne regardant pas celui-ci comme un Roi légitimement „fait, ne voulut pas le confirmer, ni renouveller l'alliance avec eux, „quoiqu'ils promissent de rendre 50 mille prisonniers . . . Ensuite „les *Quades* & les Marcomans avoient envoyé des Ambassadeurs à „Marc pour lui représenter que 20 mille Soldats, qui étoient en gar-„nison dans des châteaux, leur ôtoient la liberté de faire paître leurs „troupeaux, de labourer leurs champs, & de vaquer à leurs affaires; „que ces Soldats donnoient azyle à leurs transfuges, & leur faisoient „des prisonniers, quoique ces mêmes Soldats n'eussent point à se plain-„dre de la maniere dont ils vivoient, ayant la commodité des Bains & „abondance de tout ce qui leur étoit nécessaire. D'où il étoit arrivé „que les *Quades*, ne pouvant souffrir les constructions de ces châteaux, „entreprirent de changer de demeure & d'aller s'établir avec toute leur „nation chez les Semnons, autrement Nasamons." (Ces Semnons habitoient la Lusace, la Misnie & les Marches de Brandebourg, à ce qu'on prétend.) „Mais Marc Aurele Antonin informé de leur résolu-„tion, leur ferma les passages, & les arrêta par ce moyen. Car il ne „pensoit pas tant à se rendre maître de leur pays, qu'à se venger „d'eux." Voilà tout ce qu'on peut apprendre par Dion Cassius de la guerre de Marc Aurele Antonin contre les *Quades.*

A l'égard de Jules Capitolin qui écrivoit sous le Grand Constantin, cent ans après Dion, il y a peu d'éclaircissemens à tirer de son Histoire, parce qu'il évite les détails & passe rapidement sur les faits. La Vie de Marc Aurele Antonin qu'il a écrite est plutôt l'éloge que l'Histoire de cet Empereur. Voici cependant ce qu'il y dit: „Tandis „qu'on faisoit la guerre aux Parthes, on vit naître celle des Marco-„mans, qui fut longtems suspendue par l'adresse de ceux qui en „étoient à portée, pour donner le loisir de finir l'autre. Et comme, „à cause de la famine, l'Empereur avoit annoncé cette guerre au Peu-

 „ple,

„ple, son frere en étant revenu après cinq ans d'absence, il fit enten-
„dre dans le Sénat que la guerre de Germanie demandoit nécessaire-
„ment la présence des deux Empereurs. Or la crainte de la guerre
„des Marcomans étoit si grande qu'Antonin rassembla les Prêtres de
„toute part, qu'il accomplit les cérémonies étrangeres, purifia Rome
„par toutes sortes d'expiations, & retarda son départ pour célébrer
„des *lectisternes* à la maniere des Romains pendant sept jours . . . .
„Les deux Empereurs partirent donc vêtus de leur cotte d'armes, dans le
„tems que les Victovales & les Marcomans causoient de grands trou-
„bles, & que d'autres Peuples qui avoient été par eux chassés, fai-
„soient la guerre pour être rétablis. Ce départ fit un très-bon effet.
„Car, dès qu'ils furent venus à Aquilée, la plupart des Rois se retire-
„rent avec leurs peuples & mirent à mort les auteurs du tumulte.
„Les *Quades* de leur côté ayant perdu leur Roi, disoient qu'ils ne con-
„firmeroient celui qui avoit été mis à sa place, qu'après que les Em-
„pereurs l'auroient approuvé. Cependant Lucius (*) partit à regret,
„sachant que la plupart envoyoient des députés aux Gouverneurs Im-
„périaux pour demander pardon de leur révolte. Et comme on avoit
„perdu Furius Victorinus, Préfet du Prétoire, & qu'une partie de
„l'armée avoit péri, il vouloit qu'on revînt sur ses pas. Mais Marc
„jugeant que ce que les Barbares faisoient n'étoit qu'une feinte pour
„détourner la guerre de chez eux, disoit qu'il falloit la presser.
„Ayant donc passé les Alpes, ils allerent en avant, & prirent toutes
„les mesures convenables pour mettre à couvert l'Italie & l'Illyrie. Il
„fut décidé néanmoins, sur les instances de Lucius, & après en avoir
„écrit au Sénat, que cet Empereur retourneroit à Rome. Là-dessus
„étant en chemin & dans la même voiture que son frere, il fut frappé
„d'apoplexie & mourut . . . Marc, par cette mort resté seul Empe-
„reur, traita les Provinces avec beaucoup de modération & de dou-
„ceur. Il se tira heureusement de sa guerre contre les Germains. Il
„termina surtout celle des Marcomans, la plus grande dont on ait con-
„noissance, avec autant de courage que de bonheur, quoiqu'il la fit
„dans

(*) C'étoit le frere & le collegue de Marc Aurele Antonin.

„dans un tems où la peste avoit emporté bien des milliers de citoyens „& de soldats. Ayant donc détruit & éteint les Marcomans, les Sar„mates, les Wandales, & les *Quades* tout à la fois, il affranchit du „Service les Pannonies . . . Dans son passage du Danube, dit-il ail„leurs, il détruisit les Marcomans . . . Toutes les Nations depuis „la frontiere de l'Illyrie jusqu'à la Gaule avoient fait une conspiration, „Marcomans, Narisques, Hermundures & *Quades*, Sueves, Sarma„tes, Latringues & Burois; & d'un autre côté les Victovales, Sosi„bes, Sicobotes, Roxolans, Bastarnes, Alains, Peucins & Costobo„ques . . . Il reçut à composition les Marcomans, & en fit passer „un grand nombre en Italie." Enfin, quelques pages encore plus loin, vient la circonstance de l'orage dont parle Dion, & attribuée, non au Magicien Arnuphis, ni aux prieres des Chrétiens, ce qui eût été également fabuleux, mais à celles de Marc Aurele Antonin même; ce qui dans le fond est tout aussi faux. „Il attira, dit-il, par ses prieres la „foudre du Ciel contre les machines de ses ennemis, après avoir obte„nu de la pluie pour ses troupes qui souffroient de la soif:" *Fulmen de cælo precibus suis contra hostium machinamentum extorsit, suis pluvia impetrata quùm siti laborarent.* Et c'est à peu près ce que le Poëte Claudien dit aussi dans ces vers de son Poëme sur le VI[e] Consulat d'Honorius.

Nec tantis patriæ studiis ad templa vocatus
Clemens, Marce, redis, cum gentibus undique cinctam
Exuit Hesperiam paribus Fortuna periclis.
Laus ibi nulla ducum: nam flammeus imber in hostem
Decidit: hunc dorso trepidum fumante ferebat
Ambustus sonipes: hic tabescente solutus
Subsedit galea, liquefactaque fulgure cuspis
Canduit, & subitis fluxere vaporibus enses.
Tunc contenta polo mortalis nescia teli
Pugna fuit: Chaldæa mago seu carmina ritu
Armavere Deos; seu, quod reor, omne Tonantis
Obsequium Marci mores potuere mereri.

C'est

C'est à dire: „Ce fut, Marc, avec moins d'empressement que la patrie „t'appelloit dans ses temples, où tu revins plein de clémence, lorsque „la Fortune eut délivré d'aussi grands dangers l'Hespérie qui étoit investie „de tous côtés par les nations. On n'en fut point redevable à la valeur „des Généraux. Car une pluie de feu tomba sur les ennemis. Les „chevaux brulés portoient les uns tout épouvantés sur leur dos fu„mant. D'autres voyoient se détacher leur casque en poussiere. Le „métal des épées touchées de la foudre blanchissoit, devenoit liquide „& soudain s'exhaloit en vapeurs. Il y eut alors un combat où l'on „n'employoit d'autres armes que celles du Ciel: soit que la magie des „enchanteurs Caldéens eût armé les Dieux; ou, comme je croi, que „Marc par ses vertus eût pu mériter toute la complaisance du Dieu „du tonnerre."

Que Jules Capitolin, qui écrivoit sous des Empereurs Païens, ait servi leur religion & la sienne aux dépens de celle des Chrétiens, cela ne me surprendroit pas; mais que Claudien, quelle qu'ait été sa religion, vivant à la Cour d'Honorius fils du grand Théodose & aussi zélé Chrétien que son pere, ait osé dans un Poëme fait à l'honneur de ce Prince, dissimuler la part que les Chrétiens avoient eu à un événement qu'il regarde comme miraculeux, pour l'attribuer tout entier, soit à la magie des Caldéens, soit à la piété d'un Empereur Païen; c'est ce qu'on ne peut ni concevoir ni excuser qu'en disant qu'Honorius ne croyoit pas sa Religion intéressée dans cet événement, parce que comme ce n'étoit dans le fond qu'un événement naturel, exagéré par la flaterie, il étoit persuadé que les Chrétiens n'y avoient point eu de part. Ainsi, ou l'on ne connoissoit point à la Cour de cet Empereur la prétendue Lettre de Marc Aurele Antonin, écrite au Sénat en faveur des Chrétiens, ou on la regardoit dès-lors comme un Piece supposée.

Mais enfin, s'il étoit vrai que Marc Aurele Antonin eût écrit cette Lettre & avoué publiquement l'obligation que lui & son armée avoient aux Chrétiens, connoissant le pouvoir de leur Dieu, auroit-il osé lui dérober la gloire de ce prodige, pour l'attribuer à ses faux

Dieux

Dieux dont il avoit, suivant cette même Lettre, éprouvé l'impuissance? C'est cependant ce qu'il a fait par un monument qui a passé à la postérité. Ce monument est une Colonne de marbre qu'on voit à Rome, dédiée, suivant son inscription, non au Dieu des Chrétiens, mais à celui des Paiens, à Jupiter le Pluvieux, & cette Colonne est appellée la Colonne Antonine, non pas, comme je croi, du nom de cet Empereur, mais de celui d'Antonin Pie son prédécesseur, à l'honneur de qui il l'avoit érigée en mettant au-dessus sa statue. Cette colonne ayant été renversée par la suite des tems, le Pape Sixte V. la fit relever & remplaça la Statue d'Antonin par celle de S. Paul. Le fust de cette colonne est orné d'un bas-relief qui monte en ligne spirale dans toute sa hauteur, & qui contient l'Histoire en question.

Après avoir montré par toutes ces raisons que la Lettre attribuée à Marc Aurele Antonin est aussi fausse que le miracle qui en fait le sujet, il est inutile de prouver que les *Quades* ne furent, ni consumés par le feu du Ciel, comme Xiphilin voudroit le faire croire, ni éteints ou détruits par les armes de Marc Aurele Antonin, comme Jules Capitolin le prétend. C'est ce Peuple qui tantôt seul & tantôt uni avec les Marcomans, Sarmates & autres, fut encore aux mains non seulement avec cet Empereur en 179, un an avant sa mort, mais même pendant près de trois siecles avec ses successeurs, tels que Maximin en 236, Dioclétien en 302, Constance en 354, 355 & 358, Julien la même année, & Valentinien I. en 364. 373. 74 & 75. Ce dernier Empereur, suivant Ammien Marcellin, voyant que les *Quades* n'étoient pas assez paisibles à son gré, parce qu'en effet, à la faveur des troubles qui s'élevoient de tous côtés dans l'Empire, ils faisoient de tems en tems des efforts pour se remettre en possession de la Pannonie leur ancienne demeure, passa le Danube, les surprit, brûla leurs bourgades & fit sur eux un grand nombre de prisonniers. A son retour dans la Pannonie, ils lui envoyerent des Ambassadeurs. Leur équipage ne répondant point à leur qualité, il en parut surpris; & ayant su qu'ils étoient des premiers & des plus nobles de leur nation, il en fut si offensé, & leur parla avec tant d'emportement, qu'il tomba dans une apoplexie dont il mourut sur le champ... Cependant il paroît par la

Notice des deux Empires qui est de l'année 437, du tems de Théodose le Jeune & de Valentinien III. que, malgré le mépris & la haine des Romains pour ce Peuple, il y avoit au service du premier de ces deux Empereurs en Orient un corps de Cavalerie *Quade* sous le nom d'*Ala prima Quadorum*, qui étoit en garnison à Trinytheos près du petit Oasis dans la Thébaïde; & l'origine de ce corps étoit venue vraisemblablement d'une grande troupe de *Quades*, que les Saxons dont ils faisoient partie, avoient envoyés vers l'an 358 sur les terres que tenoient les Romains. Ces *Quades* passerent sur le Rhin le long du pays des Francs, d'où ils alloient faire irruption sur les terres de l'Empire. Ils aborderent à Batavie & en chasserent les Francs appellés Saliens qui s'y étoient établis après avoir été mis hors de leur pays par les Saxons. Julien le César averti de cette hostilité attaqua les *Quades* qui se rendirent à discrétion, mais ils ne laisserent pas de faire encore du désordre par leurs courses & leurs pillages. Il y avoit parmi eux un homme d'une taille & d'une force extraordinaire, nommé Carjetton. Cet homme quitta sa Nation & fut demeurer à Treves. Mais souvent il alloit se cacher dans les bois, & lorsqu'il découvroit quelques *Quades* yvres & endormis, il leur coupoit la tête qu'il apportoit dans la ville. Les *Quades* étoient étonnés de voir diminuer leur nombre sans savoir comment. D'autres voleurs s'étant joints à lui, il déclara son secret à Julien, & lui offrit ses services qui furent acceptés. Sa troupe fut renforcée d'une milice & de quelques Saliens que Julien lui donna. Avec cette troupe il alloit toutes les nuits à la quête des *Quades*, & en expédioit tout autant qu'il en attrapoit. En ayant usé longtems de la sorte, les *Quades* virent leur multitude réduite à un petit nombre, de sorte que n'ayant plus aucun moyen de se maintenir, ils se rendirent avec leur Roi, dont le fils avoit été pris quelque tems auparavant par Carjetton. Et sur ce que Julien demandoit au Roi s'il n'avoit pas quelqu'un de ses enfans à lui donner en ôtage, le Roi lui jura les larmes aux yeux qu'il avoit eu le malheur de perdre son fils unique. Aussitôt

Julien

Julien, touché de sa douleur, le lui montra plein de santé, & fit la paix avec lui. Une partie des *Quades* entra au service de l'Empire, & leurs successeurs y étoient encore du tems de Théodose le Jeune, & de l'Historien Zosime de qui est tiré le récit que je viens de faire. Une autre partie de ce Peuple se joignit l'an 406 à Godesiele, Roi des Vandales, qui alla fonder un Royaume en Espagne, & de là en Afrique. Une troisiéme partie suivit encore Attila dans l'expédition qu'il fit en Italie l'an 450. C'est la derniere fois que le nom des *Quades* paroît dans l'Histoire. Mais on ne sauroit douter que ce Peuple ne soit le même que celui qui habite encore actuellement la Moravie, puisqu'on ne voit point que le corps de la Nation en ait été chassé, ni qu'il ait quitté de lui-même ce pays-là pour aller s'établir ailleurs.



QU'IL FAUT
COMBINER ENSEMBLE
LES LETTRES ET LA PHILOSOPHIE.
PAR MR. TOUSSAINT (*).

On a proposé quelquefois comme une question à débattre, lequel mérite plus de considération, du bel-esprit, ou de la Philosophie. Mais avoit-on déterminé ce qu'on entendoit par l'un & par l'autre? C'est cependant par-là qu'il faut commencer avant de rien décider sur le parallele.

Il me semble à moi que le bel esprit est la raison, ou le bon sens, orné des graces de l'imagination; d'où naissent des idées justes & des tableaux riants:

Et que la Philosophie est la connoissance des êtres & de leurs rapports respectifs; l'intuition de la substance & de ses modes.

L'un est un présent de la nature, l'autre est un fruit de l'étude. Ce sont donc deux choses de caracteres aussi différens que la longueur de l'espace & la longueur de la durée. Mais, pour suivre la même idée, comme on peut comparer la longueur d'un temps donné avec celle de l'espace parcouru pendant ce temps, on peut aussi trouver des rapports entre le Bel-esprit & le Philosophe. Ils sympathisent même tellement que l'un ne peut guere se passer de l'autre: ce sont deux aimans qui s'attirent ou qui doivent s'attirer. Chacun des deux est d'un mérite médiocre sans l'autre: mais réunis, ils élevent l'homme au dessus de lui-même, & lui font opérer des prodiges: ainsi que le charbon &

(*) Lû le 26 Janvier 1769.

& le salpetre employés séparément n'ont ni énergie ni ressort; au lieu que, mariés ensemble, ils acquierent une force d'explosion à laquelle les plus durs rochers & les remparts les plus épais sont incapables de résister.

Le commun des hommes est une foule nombreuse d'animaux soi-disants raisonnables, mais qui pourtant ne réfléchissent jamais; qui ne se mettent point en peine de se mesurer, ou de compter avec eux-mêmes, & qui n'ont jamais songé qu'ils dussent le faire; qui, pendant toute leur vie, ne font que vivre; je veux dire qui, depuis leur naissance jusqu'à leur mort, ne s'occupent que de leurs besoins physiques, ou de leurs appétits charnels; espece d'êtres mitoyens entre l'homme instruit & la brute, qui ne different guere de celle-ci que par la faculté qu'ils ont de pouvoir s'élever au dessus d'elle, mais qui rarement s'émancipent jusqu'à en user.

Je suppose que, dans ce nombre immense d'hommes grossiers aussi peu estimables les uns que les autres, on veuille donner à quelques-uns une prééminence honorable; ainsi que le propriétaire d'une forêt qui médite d'abattre un taillis, reserve d'espace en espace quelques baliveaux d'une belle pousse, pour en faire un jour des bois de construction: comment faudra-t-il faire pour leur procurer cette considération distinguée?

Je sais bien ce que répondra, si on le consulte, un lâche adorateur de la fortune. Son expédient sera de leur conférer des titres, des dignités, des commandemens, de la Noblesse: mais ce ne seroit là que pallier leur bassesse, ce ne seroit qu'élever des nains sur des échasses sans ajouter une demi-ligne à leur taille. Dans une nation sans culture, les sujets constitués en dignités sont incultes aussi; & dans nos nations policées, il n'est pas rare que les trois quarts des grands soient peuple comme d'autres. Les juges éclairés ne prennent pas les honneurs pour du mérite; & ce n'est qu'à raison du mérite qu'ils considerent les autres hommes. Lors donc qu'il s'agira de former une classe d'élite, il faudra tirer de la masse universelle, des sujets qui tiennent

 déja

déja de la nature quelque aptitude à pouvoir être cultivés avec fruit, & en qui la dépravation n'ait pas étouffé cette heureuse disposition; & pour la mettre utilement en œuvre, on remplira leur mémoire, on exercera leur intelligence, on fixera leur imagination vagabonde.

Comme les grands artistes, quand ils découvrent dans de jeunes éleves les germes du talent, se plaisent à le développer par leurs soins, & à se créer des successeurs: ainsi les ames honnêtes qui aiment leur espece, rougissant de la voir ravalée presque au niveau des animaux brutes, voudroient qu'elle répondît à la noblesse de son origine, & à la dignité de sa destination. Au contraire, les hommes hautains & impérieux, qui sont tourmentés par la manie de dominer, ne trouvent jamais l'abrutissement assez complet. Plus ils voyent de créatures humaines croupir dans l'ignorance & la stupidité, plus ils comptent de sujets dévoués & de victimes obéissantes. Ce sont ces gens-là & leurs adhérens qui se sont avisés de mettre en question, s'il est utile d'éclairer les hommes? Ils croyent faussement que la plus vile partie du genre humain est celle qu'on gouverne le mieux.

Je sais qu'il ne faut pas, pour multiplier ou peupler les Académies, arracher le laboureur à sa charrue, l'artisan à son attelier, le soldat à son drapeau; & que sans doute ce seroit un mal que tous les sujets d'un Etat devinssent tout à coup des Lettrés ou des Philosophes; mais aussi n'est-ce pas là ce que je prétends. Et d'ailleurs on ne doit pas avoir d'inquiétude sur ce point. Assez de sujets ineptes aux sciences rempliront toutes ces professions méchaniques pour lesquelles il ne faut avoir que des bras ou de l'habitude; les quatre-vingt-dix-neuf centiemes des hommes se releguent d'eux-mêmes dans ces classes nombreuses.

Je suppose déjà fait le triage des hommes de génie: je leur accorde tant de justesse, tant de bon sens qu'on voudra, avec la plus brillante imagination; je leur accorde même des connoissances littéraires: s'ils sont ignorans dans les sciences, leur bel esprit se réduira à un métier bien borné; comme d'autre part la Philosophie croupiroit dans

l'obscu-

l'obscurité, si la culture de l'esprit ne leur prêtoit de l'activité, & ne favorisoit sa propagation.

Le bel esprit sans Philosophie est un feu follet qui ne jette qu'une foible lueur, faute d'alimens à quoi il puisse se prendre. La Philosophie sans le bel esprit est un bucher froid, qui ne brule ni ne brille. N'essayons point à les opposer l'un à l'autre, & à les faire contraster. Songeons plutôt à les combiner: mettons le feu au bucher, ou livrons les buches aux flammes.

PREMIERE PARTIE.

Quand j'ai dit, il y a quelques instans, que le bel esprit est un don de la nature: je n'ai point supposé que la nature en fasse seule tous les frais: elle n'en donne que le germe: & ce germe ne prend consistance & accroissement que par la culture.

Peut-être les ames considérées sans l'adjonction des corps sont-elles toutes d'une portée égale, & que ce n'est que l'organisation différente de ceux-ci qui met des différences dans les facultés de celles-là. Je le croirois d'autant plus que la diversité de configuration des parties tant internes qu'externes des corps est infinie, comme l'est la variété des esprits. L'un paroît être l'annonce & la cause de l'autre. On sait même qu'un certain sentiment d'instinct nous fait trouver des rapports entre la physionomie d'un homme & son caractere moral. Une autre remarque favorise encore plus décidément la même hypothese; c'est qu'il n'y a aucun acte de l'ame qui n'influe sur le corps, & à quoi le corps ne concoure. En considérant l'action de celle-là dans son domicile passager, je m'imagine voir un joueur dans une salle de paume lancer la balle ou la recevoir soit au vol ou au rebond. Son adresse n'est pas la seule cause qui décide des coups: Ils dépendent encore du pavé, du mur, de la galerie, & de je ne sais combien d'autres réactions concordantes ou contraires à la premiere impulsion.

Quoi qu'il en soit, cette diversité est constatée par une expérience journaliere. Il faut donc commencer par trier dans l'universalité des

des hommes ceux dont le génie annonce des dispositions; & quand on les aura choisis, il faut, pour tourner ces dispositions en talens réels, les déployer, les étendre, les fortifier, par l'étude & l'application. Il faut accoutumer la jeunesse à penser. On l'y accoutume par des notions de grammaire raisonnée, par les regles d'une logique bien approfondie, par la lecture des auteurs anciens & modernes, par le parallele de ceux-ci avec ceux-là, par des préceptes de Rhétorique soutenus d'exemples choisis, par des compositions dans tous les genres de littérature; on leur fait analyser ce que de bons écrivains ont traité au long; on leur fait étendre les sujets abrégés. Par ces pratiques & autres semblables, on leur forme le goût, on étend leur coup d'œil, & on y donne de la justesse. Alors leur ame devient avide de connoissances. Saisissez cet instant pour lui donner la pâture dont elle a besoin. Elle est adulte: nourrissez-là de mets solides; avec du vent & de la fumée vous la feriez tomber en langueur. Or ces mets solides sont les notions philosophiques. J'ose le dire sans craindre de déplaire à personne, parce que l'assemblée qui m'écoute est composée d'auditeurs intelligens, quiconque ne seroit que littérateur ne seroit rien; ou ne seroit qu'une espece d'écho, qu'une voix résonnante, incapable de concevoir des idées utiles, ou d'en faire concevoir à d'autres. Mais aussi n'arrive-t-il pas que des Littérateurs d'une certaine force ne soient précisément que Littérateurs: car n'y eût-il que les lectures immenses qu'il leur a fallu faire pour mériter dans leur classe un rang distingué, ils n'ont pu manquer d'y puiser, au moins chemin faisant, quelque teinture de cet esprit philosophique qui regne surtout dans les ouvrages des anciens. Il en est des sciences & des arts comme des élémens, dont aucun n'est formé d'une matiere si simple qu'elle n'admette au moins quelques particules hétérogenes. La simplicité absolue est un être de raison. De même, aucune science n'est complette qu'autant qu'elle entame, pour ainsi dire, par les bords toutes celles qui lui sont limitrophes: & le savant dans un genre ne se distingue de celui qui l'est dans un autre, qu'en ce que la science que le premier professe est le point à quoi il rapporte les autres sciences, comme des rayons à

leur

leur centre, tandis que l'autre prend pour centre l'extrémité d'un des rayons de l'autre cercle. Qu'on applique cette maxime aux objets du bel esprit, il en résultera que les connoissances littéraires ne sont jamais poussées fort loin, si elles ne débordent un peu sur le terrein de la Philosophie. Ce que Ciceron disoit de l'Orateur, qu'il n'y a aucune science qu'il ne doive posséder, est vrai aussi appliqué aux Lettres, pourvû qu'on l'entende avec les restrictions que j'y mets. Pour être supérieur dans une partie, il n'est pas besoin d'être universel: mais il est au moins nécessaire de savoir un peu de tout. C'est cette presqu'universalité qui a fait la grande réputation du Nestor Littéraire dont la France s'est glorifiée si longtemps; c'est ce qui fait celle d'un Académicien de France encore vivant, que nous revendiquons nous-mêmes ici pour confrere; c'est ce qui fait celle d'un grand Poëte dont le nom décore aussi nos listes.

Pour rendre cette doctrine plus sensible, parcourons les principaux genres qu'on peut ranger dans le département du bel esprit: & nous verrons que, quel que soit celui qu'il choisisse, il n'y pourra pas faire deux pas de suite sans s'aider de quelqu'une des connoissances qui appartiennent à la Philosophie.

Veut-on se consacrer à l'Histoire: il ne suffira pas de coudre une multitude de faits les uns à la suite des autres, sans en donner la clé par le développement des mœurs & de la politique: on ne seroit qu'un froid annaliste. En vain même répandroit-on sur sa narration les agrémens d'une diction fleurie: ce ne seroit que parer un squelete. L'Historiographe doit connoître à fond les principes du droit public & les ressorts de la Science du gouvernement. Les événemens ne doivent pas être présentés sans leurs causes; & leur suite doit être prévue. Le tableau des événemens est aussi celui du cœur humain. Faire des annales c'est esquisser: mais écrire l'Histoire c'est peindre.

Un point pour lequel la Philosophie est encore nécessaire à l'Historien, c'est pour le purger des préjugés populaires qui deshonorent

rent & décréditent l'histoire par l'insertion de prodiges absurdes & de fictions monstrueuses. Car quelle créance peut-on donner à un Ecrivain dans lequel on lit qu'un Chevalier Romain a calmé les Dieux irrités en se précipitant dans un gouffre, qui comme un requin vorace ouvrit sa gueule pour le recevoir, & la referma après l'avoir englouti? Comment prendre pour véridique, même sur des faits possibles & vraissemblables, un autre qui vous donne pour des faits constans des apparitions d'esprits, des évocations, des irrégularités dans le cours des astres, démenties par l'Astronomie, des grêles de cailloux, des armées aëriennes, des pluies de sang, & mille autres extravagances de cette nature? Le Philosophe, qui sait à peu près jusqu'où va la possibilité physique, ne supposera point que des choses qui ne peuvent pas être ayent été.

La Géographie & la Chronologie, ces deux colonnes qui portent l'Histoire, n'auroient point elles-mêmes d'assiette, & s'écrouleroient, sans le secours de l'Astronomie, de la Géométrie & des nombres.

Et combien ne faudra-t-il pas pour la Géographie, en particulier, de connoissances ultérieures, si l'on y fait entrer le détail des productions de chaque sol, la variété immense des animaux qui peuplent les trois élémens, des plantes qui couvrent la surface du globe, & des minéraux qu'enferment ses entrailles! Cette branche s'étend bien avant dans la Physique; d'autres percent dans la Théologie, dans la Morale, dans la science du gouvernement, dans le Droit public & le Droit naturel. Quelque connoissance que ce soit qu'on creuse un peu, on trouve toujours la Philosophie au fond. C'est le tuf qu'il faut rencontrer pour donner aux édifices qu'on éleve une assise ferme & solide.

Qu'est-ce que l'Eloquence sans un fond de Philosophie? Du bruit, des sons, qui, n'atteignant ni au cœur ni à l'esprit ne soutient pas même l'attention de l'auditeur. C'est par ces parleurs frivoles qui ne disent que des mots, qui ne puisent leur sujet que dans la source inféconde des lieux communs, qu'a été décrié le bel art des Demosthenes

&

& des Cicerons. Les Sophistes ont gâté la Philosophie & les Rhéteurs l'Eloquence. Les fruits de cire ne rassasient point : il faut que les mots expriment des idées ; & que ces idées soient intéressantes. Or elles ne le sont qu'autant qu'elles peignent la nature ; & pour la peindre il faut la connoître.

C'est ce qui rend la Philosophie nécessaire même aux Poëtes : tout est image dans la Poësie ; & c'est en cela précisément que consiste la différence spécifique par quoi on la distingue de la Prose, qui dit les choses sans les mettre en tableau. La Poësie est un langage divin qui embrasse tous les sujets. Il ne dédaigne pas les plus naïfs, & peut s'élever aux plus sublimes : sous la plume d'Anacréon elle peignoit les plaisirs de la table & ceux des commerces galans ; sous celle d'Ovide le systême riant de la Fable, où les ressorts du vaste univers personnifiés en présentoient agréablement toutes les parties comme des Intelligences agissantes. Homere avoit chanté les Dieux & les Héros combinés ensemble pour la ruine & pour la défense de Troie. Quelle connoissance profonde de la Physique, & en particulier de l'Anatomie, il fait briller dans ses descriptions !

Virgile, émule d'Homere dans son Enéide, avoit chanté d'abord les travaux des champs, & les plaisirs de ceux qui les cultivent.

Lucrece chanta toute la nature, & la chanta en Philosophe profond.

Tous les Poëtes la peignent, sinon en entier, au moins par parties & sous differens aspects.

Le Romancier même la peint ; & dans la région lointaine des fictions, sous le nuage brillant du merveilleux, c'est pourtant toujours par la nature qu'il est guidé ; & Don-Quixote est philosophe à sa maniere.

Ce n'est pas ravaler la Philosophie trop bas que de l'introduire dans les conversations ; & ce n'est pas non plus dénaturer les conversations que de l'y admettre. Ce seroit déjà une raison de rougir, si

 en

en société on ne savoit dire que des riens, de ces bagatelles sans objet, qui servent plus à passer le temps qu'à l'employer. Mais quiconque voudroit pourtant s'y borner, se trouveroit entraîné malgré lui par la diversité des propos dans des matieres qui exigent des connoissances; il sentiroit son vuide avec confusion, & resteroit court. Si, pour s'épargner cette honte, il préfere les cercles où regne l'ignorance; outre qu'il n'en sera pas à l'abri, parce qu'on pourra le provoquer par des questions, le voilà donc pour toujours relégué dans une classe vile, & borné à des fréquentations ignobles. Il a choisi son coin pour la vie: cantonné dans des réduits obscurs ou méprisables, il a rompu pour toujours avec la bonne compagnie, qui est celle des hommes instruits.

J'entends quelquefois exalter la manie du jeu comme une ressource précieuse contre le desœuvrement & ses effets dangereux, ou comme un préservatif contre la médisance & les conversations licentieuses. J'aimerois autant qu'on me dît qu'il est bien heureux qu'on ait acquis l'art d'acérer le fer ou de l'aiguiser, parce que moyennant les instrumens perçans ou tranchans qu'on en a su faire, les hommes peuvent se passer du poison: mais ces poignards & ces épées sont eux-mêmes des instrumens de mort. Ce jeu lui-même dont on a fait une ressource, excite des querelles, brouille des amis, leur met les armes à la main, deshonore des femmes, ruine des maisons entieres.

Le vrai secret & l'unique pour remplir les vuides du temps, dans toutes les classes d'hommes que l'aisance a dispensés des travaux corporels, ou à qui une fausse délicatesse les a interdits, c'est de charger la partie spirituelle de l'obligation du travail dont la corporelle est exempte. Il faut non-seulement qu'ils exercent leur ame par l'étude des sciences: mais il faut qu'ils le fassent avec quelque sorte de passion. Par là, d'abord leur temps est rempli, leur cerveau meublé; & placés vis à vis d'êtres raisonnables, ils ont de quoi les entretenir utilement.

Car

Car que fait à un homme dont la tête est passablement garnie de principes & de connoissances, la conversation qui part d'une tête vuide? Ce n'est pour lui que le grommellement d'un quadrupede, ou le gasouillement d'un oiseau.

Qu'est-ce qui rend si insipides les cercles nombreux de ces êtres, d'ailleurs aimables, qu'on appelle les jolies femmes? C'est que ces belles bouches, qui à la vérité nous font grace des affaires domestiques à quoi sont bornés les propos des femmes du commun, ne mettent à la place de ces détails fastidieux, que l'étalage de leur parures, & les recherches de la toilette, qui le sont à peu près autant. Nous voulons bien voir leur décoration en perspective, ou la machine trompeuse de leur ajustement toute dressée: mais les particularités du méchanisme nous déplaisent.

Les propos même de la plupart de ces hommes importans qui comptent porter suspendu à leur baudrier le sort des empires, ne sont pourtant devant l'homme instruit, qu'un bruit rauque qui fatigue les oreilles, & révolte l'humanité. Ceux qui n'ont pas l'esprit cultivé, de quelque grade qu'ils soient, n'ont qu'un cercle étroit d'idées borné aux objets matériels qui touchent leur état physique. Si la nature délioit la langue des animaux brutes, ceux-ci diroient à peu près les mêmes choses que ceux-là. Ils parleroient comme eux de leurs repaires, de leurs chasses, de leurs amours, de leurs combats.

SECONDE PARTIE.

Soyons justes, & usons de réciprocité. J'ai non-seulement avoué, mais mis en these, que le mérite littéraire est d'une bien foible considération, si l'on n'y a pas joint une dose un peu forte de Philosophie.

Les Belles-Lettres ne sont point des sciences: mais elles menent aux sciences; elles mettent dans les sciences de l'ordre & de la méthode, elles y répandent des graces & de la dignité; elles en rendent la communication également facile & agréable, & les transmettent à la

postérité la plus reculée; ainsi que l'hydraulique sait tirer tour à tour, de l'élément fluide, des spectacles enchanteurs & des services utiles; & que tantôt s'appropriant les eaux d'un fleuve, qu'elle guinde par la magie des pompes, dans des réservoirs exhaussés, elle les reverse en jets, en nappes, en parasols, en gerbes, en fontaines jaillissantes; les taille & les découpe, pour ainsi dire, sous mille formes différentes, comme l'ouvrier rend dans son attelier les matériaux solides obéissants au ciseau; tantôt les employant à des usages plus importants leur fait mouvoir de puissans rouages, qui pulvérisent nos grains, qui façonnent le fer au sortir de la mine, qui broyent les viles recoupes dont se forment ces précieux assemblages de feuilles minces & souples où l'esprit humain dépose le trésor varié de ses connoissances & les heureux fruits de ses méditations & de ses veilles.

Le premier service que les Lettres ont rendu à la Philosophie, c'est de leur avoir donné l'entrée dans le monde. L'homme a plutôt été créé pour l'action que pour la méditation. Le laboureur qui cultive la terre, & l'ouvrier qui en fabrique les productions, remplissent la destination ordinaire de l'humanité. Mais l'homme avide de sciences s'éleve, par ce goût, au dessus de sa destination ordinaire. Aussi la Science de son côté, comme une vierge chaste, à qui sa pudeur honnête sert de défense & de rempart, ne se rend pas sans résistance à qui prétend la conquérir; mais, quand les Lettres dont l'amateur s'est occupé pendant ses premieres années, lui ont applani le chemin, elle s'en laisse approcher, se familiarise, & se livre enfin de bonne grace. L'esprit par l'étude des Lettres s'est accoûtumé à l'application & aux efforts: il connoît sa force, & cette connoissance soutient son courage contre les difficultés dont la science est hérissée au premier abord.

Quelle ingratitude ce seroit à celui qui leur a tant d'obligations, d'invectiver contre elles, & de les flétrir par enthousiasme pour la science dont il se laisseroit enfler; comme si quelqu'un qui auroit gravi une haute montagne, n'en vouloit compter pour rien la base, parce qu'il en auroit atteint la cime.

Un

Un autre service que les Lettres rendent aux sciences, c'est de leur donner le talent de s'énoncer avec clarté, ordre & méthode. J'en appelle à l'expérience, & pour peu qu'on y veuille faire attention, on observera que plus la belle Littérature est en honneur dans un pays, plus les traités sur les matieres scientifiques y sont méthodiques, clairs & intelligibles. Dans les ouvrages mêmes de pur bel esprit, la clarté est la premiere qualité; l'ornement vient après s'il peut: c'est une perfection de plus; mais il faut d'abord se faire entendre. Celui qui a commencé à cultiver les Lettres avec succès, ne se départ plus de ce goût pour la lumiere, & le porte des Lettres dans les sciences; il prend en horreur le jargon ténébreux de l'ancienne école, veut que chaque mot présente une idée, & que toutes les idées soient conséquentes & liées.

Faisons une supposition dont la réalité est presque impossible. Qu'un homme sans Lettres prenne tout à coup l'envie de devenir Philosophe; sa tête novice aux réflexions, aux combinaisons, à la contention de l'esprit, ne fera que se remplir d'idées confuses & décousues, qui resteront isolées & sans contexture; rien ne prendra un ordre systématique; ainsi que quand on loge dans sa mémoire les premiers mots d'une langue étrangere, ils s'y placent seul à seul, & y nagent, comme dans un vaste Océan; mais ils ne s'approchent pas d'assez près, & ne s'adaptent pas assez juste ensemble pour former des phrases ni aucune sorte de discours suivi. Il en est tout autrement quand l'étude des Lettres a précédé celle des sciences: elles ont, pour ainsi dire, pratiqué dans le cerveau de l'amateur un grand nombre de chambres distinctes où les notions se distribuent & s'arrangent, chacune dans la place qui lui convient.

Elles ont fait plus: elles ont embelli des graces du style, & des richesses de l'imagination, jusqu'aux parties des Sciences qu'on croyoit vouées pour l'éternité à la sécheresse & à l'obscurité. Platon, enchanté sans doute par le génie qui avoit inspiré son maître, sut répandre tout à la fois de la force & de l'aménité sur tous les sujets qu'il

traita.

tutes. Nos siecles modernes ont aussi eu leurs Platons: Descartes, Malebranche, Fontenelle; mais surtout celui-ci, qui peut-être a le plus contribué dans le dernier siecle, par le tour agréable sous lequel il présentoit les vérités les plus abstraites, à rendre la Philosophie aimable, accessible & familiere à toutes les classes de la société. Comme ses Mondes, ses Oracles, son Histoire de l'Académie, ses Eloges des Académiciens se font lire avec délices! Pascal avoit aussi cet heureux talent: autant bel esprit que savant profond, il eut l'art de traiter des minucies théologiques d'un ton si facile & si badin, que ce fut une lecture à la mode qu'on dévoroit avidement & qu'on aime encore, à présent même que les sujets sur quoi elle roule ont perdu de leur intérêt.

Si j'osois effleurer l'Eloge des auteurs vivans, j'en trouverois encore plus d'un, qui marchant sur les traces des deux précédens, & les surpassant peut-être, ont fait voir que ce n'est pas par un don spécial d'enhaut qu'on est capable d'habiller Minerve en Venus. C'est un talent devenu commun; ce seroit plutôt une honte d'écrire séchement, même sur des matieres philosophiques, que ce n'est une gloire de les traiter avec agrément: il n'est plus permis d'être sec. Il y a du style dans les Elémens du Commerce, dans les Elémens de Chymie; il y en a dans un certain petit traité moderne sur les dents, intitulé Odontotechnie; il y en a dans un livret sur l'Architecture, dans un autre sur les imaginations des femmes enceintes: & le portrait que vous avez devant les yeux m'avertit de ne pas omettre parmi les exemples que je cite, les ornemens jettés à pleines mains par l'illustre Président que nous regrettons, sur la Vénus Physique. Que l'on compare tant qu'on voudra les secours qu'emprunte des Lettres la Philosophie, à ces attraits postiches dont les beautés conquérantes aiment à rehausser leurs graces naturelles. Le fait est que celles-ci atteignent à leur but. Par le fard, par les couleurs & par la parure, elles sont plus belles & le sont plus longtems. De même la Philosophie mariée au bel esprit étend son regne plus loin, & en prolonge la durée; à mérite égal les productions philosophiques où le génie étincelle & brille,

doivent être goûtées plus généralement de tous les peuples & percer plus avant dans la nuit des temps à venir.

Les gens qui manquent de goût, qui ne savent pas se mettre, crient contre le luxe des habits, des équipages, des ameublements. Ceux qui n'ont point de graces dans les mouvemens trouvent que la danse est un baladinage ridicule, que l'escrime est une barbarie, que l'équitation est une perte de temps, que la musique n'est que du bruit; comme le renard écourté crioit à ses semblables, que la queue est un fardeau incommode dont on devroit se défaire. Il est trop tard à présent de s'élever contre l'usage reçu de bien écrire. Si c'est un abus, il a pris racine; & la présomption est contre ceux qui le voudroient extirper: on seroit en droit de supposer qu'ils sont incapables de tomber dans le prétendu défaut qu'ils combattent, & peut-être à la maniere dont ils le combattent, on en auroit une preuve évidente.

C'est une vérité constante, qu'il faut embellir la verité, que la nudité dans le sens moral est choquante comme elle le seroit dans le sens physique. C'est cette réflexion qui a donné naissance aux fables, à l'allusion, à l'allégorie. La même doit porter le Philosophe à revêtir l'exposition de ses connoissances, de tours heureux, d'expressions figurées, qui vivifient la science, & la fassent pénétrer dans l'esprit des autres. Sans ces secours, ce n'est qu'une lanterne sourde, qui guide tout au plus celui qui la porte: avec ces secours, c'est un flambeau lumineux qui éclaire une vaste atmosphere.

Pour goûter le mérite des sciences destituées des embellissements de l'imagination, il faudroit y être déjà initié: leur utilité pourroit engager nos ames & les captiver. Mais, quand ces avenues même sont riantes & semées de fleurs, on se laisse aisément gagner par l'attrait du plaisir; & l'utile alors suit l'agréable. On a beau déclamer contre ceux qui préferent ce dernier à l'autre: l'homme est constitué ainsi, il ne fait qu'obéir à l'instinct de la nature. Tout ce qu'elle a voulu qu'il exécutât pour son plus grand bien, elle l'y

a porté par l'appas des sensations agréables: elle lui a fait trouver du plaisir à manger, à boire; que sais-je, à l'appaisement de tous ses besoins. On diroit même qu'elle ne lui a donné des besoins que pour lui procurer des plaisirs. La Philosophie, qui est l'interprête de la nature, doit donc spécialement se piquer d'en suivre les sages suggestions; & si elle est curieuse de s'attirer des adorateurs, ne pas dédaigner la ressource de la parure & des ajustemens. Il lui en faut pour conquérir: il lui en faut pour garder ses conquêtes, que la Littérature, toujours coquette, lui envie & lui dispute. Le seul moyen qu'ayent ces deux rivales pour maintenir leurs possessions, c'est de s'accommoder entre elles, par quelques cessions réciproques: il faut qu'au lieu de se disputer le terrein elles le partagent; que la Philosophie fournisse des matériaux au bel esprit, que le bel esprit prête à la Philosophie de l'éclat & de l'intérêt: que tous deux ils se donnent la main, que l'un serve à perfectionner l'autre. Ainsi le Dieu qui fait germer nos plantes, les nourrit & les accroît, par le mêlange de la glebe & de l'eau. Le laboureur qui le voit faire, ne cherche point à démêler lequel vaut le mieux, de la poussiere aride à laquelle il confie son grain, ou de l'eau des pluies qui féconde cette poussiere; il leve les yeux au ciel pour appeler à lui les nuages; & lorsqu'ils se font trop attendre, il y supplée, autant qu'il peut, par l'arrosement.

ESSAI

ESSAI

SUR CETTE QUESTION:

Pourquoi la langue Italienne a-t-elle eu sur toutes les autres langues, & en particulier sur la langue Françoise, la prérogative d'arriver, presque dès sa naissance, à la perfection?

PAR MR. BITAUBÉ (*).

Un de mes illustres Confrères (**), qui possede l'universalité de l'esprit sans jamais l'affecter, m'a proposé cette question. Je l'avois abandonnée, peu content des premieres idées qui s'étoient offertes à mon esprit; lorsque plusieurs points d'Histoire me la rappellerent, & vinrent m'éclairer. Les progrès des langues sont tellement inséparables de ceux des Lettres, que mes réflexions tomberont autant sur leur promte renaissance en Italie, que sur la perfection rapide qu'acquit la langue Italienne.

On ne peut voir sans surprise cette langue presqu'aussitôt formée que mise en œuvre par les Ecrivains: après le Dante, ou, pour ainsi dire, on la voit naître, & où son état est encore un peu chancelant, paroissent dans un intervalle assez court, Pétrarque & Bocace, & tout à coup elle prend une forme invariable: depuis ce tems, c'est à dire depuis le commencement du XIV siecle, elle a dû sans doute aux Sciences & aux Arts de nouveaux termes; mais loin de changer, elle a conservé une jeunesse florissante, bien qu'il ait paru de grands Ecrivains, tels que l'Arioste & le Tasse. Au contraire, la langue Françoise, (& ici son histoire est celle de toutes les autres langues), très imparfaite

(*) Lû le 30 Novembre 1769.

(**) Mr. de la Grange.

parfaite en son berceau, s'est formée avec beaucoup de lenteur, & a subi de si grandes révolutions, que si, franchissant les divers états où elle a passé, on compare ce qu'elle est aujourd'hui à ce qu'elle fut dans son origine, peu s'en faut qu'on ne la méconnoisse.

L'Italie auroit-elle eu le privilege exclusif de posséder de grands génies au moment où l'on employa sa langue? C'est la raison qu'on allegue pour résoudre notre probleme. Mais le Philosophe qui sait combien les circonstances concourent à faire éclorre le génie, & qu'il ne s'éleve que par divers degrés, voudra connoître les causes qui ont fait jouir l'Italie de ce privilege. Pour cet effet, commençons par remonter à l'origine des langues Italienne & Françoise.

Avant l'incursion des Barbares, la langue Latine étoit généralement répandue en Gaule, comme en Italie; & même dans les derniers tems, quelques Ecoles Gauloises, voisines de l'Italie, ouvrirent aux Lettres un asyle plus paisible, & obtinrent la prééminence. Je doute néanmoins qu'on en puisse conclure que dans toutes les Gaules on parlât & écrivît le Latin plus purement qu'aux lieux où il nâquit; il est plus probable que, dans la plupart des provinces Gauloises, & surtout dans les provinces plus reculées, cette langue qui après tout n'y étoit qu'étrangere, s'altéroit un peu dans la bouche du peuple, par le mélange, sinon de termes, au moins de tours pris de la langue nationale, qui jamais ne se détruit totalement. C'est la premiere époque des changemens survenus dans les Gaules à la langue Latine, époque plus remarquable qu'on ne pense; car quand les Lettres tombent, c'est la langue du peuple qui devient dominante.

Poursuivons: l'Italie est inondée par le triple torrent des Hérules, des Goths & des Lombards; au premier coup d'œil quels coups plus funestes aux Lettres Latines! Mais ces trois peuples, ayant servi dans les armées des Empereurs, & vivant dans un long commerce avec les Romains, puisque la Religion Chrétienne s'étoit introduite au milieu d'eux, étoient très familiarisés avec la langue Latine, quoiqu'ils ne la parlassent pas sans doute fort purement. D'ailleurs, un peuple

barbare qui tombe ſur un pays policé, en adopte la langue. Rome, quoique déchue de ſon ancien éclat, pouvoit encore en impoſer à ceux qui l'avoient conquiſe.

Portons maintenant les yeux ſur les Gaules. Elles furent en proie aux Francs, nation qui fut rarement en paix avec les Empereurs, qui eut peu de commerce avec les Romains, & qui, avant la conquête des Gaules, n'embraſſa point la Religion Chrétienne: la langue Latine devoit être peu répandue parmi eux. Ajoutez à cela qu'ils vinrent dans un pays, où l'on peut dire que cette langue étoit étrangere, & devoit s'altérer parmi le peuple, au moins dans un grand nombre de provinces. Les conquérans l'adopterent néanmoins: mais on s'imagine ſans peine qu'il en réſulta, ſurtout dans les conditions inférieures, un jargon barbare mêlé de pluſieurs idiômes. Ce jargon, qui nait dans les ténebres, regne longtems chez une nation ſans qu'on s'en apperçoive, & commence à y former la langue *parlée;* inſenſiblement, ſi les circonſtances ne s'y oppoſent, elle devient la langue *écrite.*

Il réſulte de ces faits que la langue Latine a dû ſe détériorer beaucoup moins en Italie qu'en France. Auſſi cela eſt-il arrivé. La langue Italienne eſt, pour ainſi dire, calquée ſur la Latine, & moins mêlangée d'idiômes étrangers. De toutes les langues, iſſues de cette mere commune, il n'en eſt point qui trahiſſe autant ſa naiſſance, & qui lui reſſemble plus par ſes expreſſions & par ſon génie. Et voilà une des cauſes de la rapidité avec laquelle elle eſt arrivée à la perfection, & a pris un caractere ſtable presque dès ſon origine. Par les circonſtances que j'ai rapportées, on conçoit qu'elle s'eſt dénaturée plus tard, & néanmoins s'eſt formée plus promtement. Née ſans beaucoup d'altération d'une langue parfaite, elle a conſervé les germes de cette perfection, que de beaux génies ont enſuite développés, & qui même leur facilitoient cet ouvrage. Qui ne ſait au contraire avec quelle lenteur naiſſent les langues lorsqu'elles ſe forment d'elles-mêmes, ou qu'elles ſe ſont fort écartées de leur origine! Ce ſont les travaux des ſiecles: comme ces anciens monumens de la grandeur de l'Egypte, les langues,

gues, chefs-d'oeuvre de l'esprit humain, sont l'ouvrage de plusieurs générations. Il ne faut donc pas s'étonner des rapides progrès de la langue Italienne. Elle a été, si je puis m'exprimer ainsi, jettée dans le moule seulement usé de la langue latine: la Langue Françoise a été jettée dans le même moule; mais, en beaucoup d'endroits, il s'est trouvé entierement détruit.

Si nous continuons à consulter l'Histoire, nous verrons que ce n'est pas le seul avantage qu'ait eu l'Italie sur la France. Quel fut le caractere des peuples qui s'emparerent de ces deux contrées? Les mœurs des Hérules, des Goths & des Lombards s'étoient adoucies par leur commerce continuel avec les Romains; Dion-Cassius attribue même aux Goths, comme aux seuls des Barbares, le savoir & la politesse des Grecs. Théodoric mérite le titre de grand-homme; élevé à Constantinople, il aimoit les Lettres, les cultivoit dans la conversation des gens éclairés, & voulut qu'elles servissent de base à l'éducation de sa famille; Cassiodore fut son premier Ministre & son favori. Théodoric protégea tellement les Lettres, qu'il les arrêta quelque tems sur le penchant de leur ruine: vainqueur humain & pacifique, l'Italie, malgré les maux inséparables des révolutions, respira sous son empire: quoiqu'il fût Arien lui & son peuple, il ne persécuta point les Catholiques; exemple de clémence rare dans ces tems superstitieux, & que donnoit un Goth à des Romains & à des Grecs. La supposition même qu'il ne suivit en cela que les leçons de la Politique, est une preuve de ses lumieres.

Que l'on oppose à ce tableau celui des Francs & de leurs premiers chefs, & l'on verra qu'ils étoient bien moins policés que les Goths. Tandis que Théodoric faisoit régner la paix dans son empire, les descendans de Clovis, enchérissant encore sur la férocité de ce Conquérant, épouvantoient la France par les plus noirs attentats, & la déchiroient par des guerres civiles. La chute des Lettres fut donc moins rapide en Italie, non-seulement parce que les vainqueurs y altérerent moins le langage, mais encore parce qu'ils les protégerent.

Plusieurs

Plusieurs autres circonstances la favoriserent encore. Les loix des Lombards attestent que ce peuple n'étoit point plongé dans une barbarie épaisse; il fit porter aux vaincus un joug facile. Les possessions que l'empire Grec conserva très longtems en Italie, ont pu y retarder la décadence totale des Lettres. Les Papes, dont plusieurs furent très éclairés, ont entretenu dans ce pays, peut-être malgré eux, quelque gout pour la Littérature. La circonstance de tant de petits Etats, qui cherchoient à se soutenir par la politique plus encore que par la force, a pu tenir les esprits en haleine & les éguiser. Il semble que l'Italie, du sein de laquelle se répandit dans toute l'Europe la fureur des Croisades, s'y livra néanmoins elle-même avec plus de réserve; des troubles domestiques l'occuperent, troubles bien moins dangereux: tandis que les princes quittoient leurs états pour aller combattre les Infideles, les Papes demeuroient tranquilles spectateurs de la manie qu'ils avoient excitée, & Genes & Venise en profitoient pour leur commerce. Tant de Républiques qui s'éleverent dans cette contrée, concoururent encore à y dissiper les ténebres de la barbarie. Enfin, au XIII siecle, la prise de Constantinople par les Latins, a pu hâter en Italie la renaissance des Lettres; je dis en Italie, parce que leur décadence y avoit été plus retardée, & surtout que la langue étoit plus voisine de la perfection; peut-être aussi qu'on les y protégeoit davantage: on brula en France la métaphysique d'Aristote qu'y avoient fait passer les François de Constantinople.

Si l'on joint toutes ces considérations à la circonstance principale de l'irruption de peuples moins barbares que les Francs, & qui altérerent moins la langue Latine, on conviendra que l'Italie a eu de grands avantages par rapport aux Lettres; elle n'a pas échappé aux troubles ni à la barbarie: mais elle y est tombée lentement, tandis que d'autres peuples y ont été précipités; couverte de ténebres moins anciennes & moins épaissies, le jour a pu plus aisément pénétrer dans son sein. La plupart des Rois de France ont protégé les Lettres, & même les chants des Troubadours attestent que les premieres étincelles du génie ont paru dans cette contrée. Mais que sert le génie s'il n'est

favo-

favorisé par les circonstances? Ces productions précoces annonçoient tout au plus ce que la France seroit un jour, & dépouilloient la langue de la rouille la plus forte de la barbarie. Pour étouffer le génie en son berceau, il ne falloit pas même tous les troubles qui survinrent, troubles parmi lesquels on peut placer au premier rang les Croisades, où se livra le plus longtems & avec le plus de fureur la vivacité françoise. Au XVI siecle, François I. protégea puissamment les Lettres: mais, quoiqu'on l'ait nommé leur restaurateur, on ne les vit proprement renaître que sous Louis XIV, tandis qu'au contraire en Italie, elles avoient paru avec gloire avant la protection des Médicis, qui fut pour elles l'époque de leur plus grand lustre. Les circonstances que j'ai indiquées montrent que les Lettres y devoient renaître plutôt qu'en France. La prise de Constantinople par Mahomet II. a sans doute contribué à les mieux répandre en Italie: mais on peut y dater antérieurement leur renaissance, puisque la langue Italienne étoit toute formée au tems de Pétrarque & de Bocace, qui fleurirent près d'un siecle avant la reddition de cette capitale de l'empire Grec. Tout au contraire en France, on voit plus sensiblement que l'on dut à cette révolution la renaissance des Lettres & la perfection du langage, puisqu'on ne peut citer auparavant aucun chef-d'œuvre littéraire.

Le parallele de la langue Italienne avec la langue Françoise expliquera encore pourquoi, ayant paru au même tems, la premiere s'est plutôt perfectionnée. On sait qu'elle est très poétique; caractere qu'elle a conservé de la langue dont elle dérive. Forte quand elle doit l'être, quelle langue moderne atteint à sa douceur & à son agrément? Quelle molle harmonie dans ses sons! D'autres langues présentent au Musicien de grands obstacles; celle-ci l'inspire: très abondante en rimes, elle n'exige pas qu'on les place avec une froide symmétrie, & même, si leur contrainte refroidit le talent, il peut les écarter; souple & hardie, elle se permet l'abondance des épithetes. Avec tous ces avantages, elle a pu se fixer plutôt que la langue Françoise, qui, de l'aveu général, n'est pas aussi propre à la Poésie. Une langue poétique enflamme encore le talent. On a dit, je le sais, que les grands

grands génies créent les langues; cette assertion vraie, jusqu'à un certain point, devient fausse à force d'être généralisée. Je conviens qu'ils leur donnent le dernier degré de perfection dont elles sont susceptibles, qu'ils font valoir leurs beautés, adoucissent leurs défauts, & quelquefois même franchissent par l'essor du génie les barrieres qu'elles lui opposent: mais ils ne peuvent en détruire le caractère; ils ne seroient plus entendus; c'est le peuple qui leur fournit le fonds qu'ils doivent défricher; si ce fonds est ingrat, il demandera, au moins, de plus longs travaux; on distinguera sensiblement les divers degrés où passera la langue avant d'arriver à la perfection, tandis qu'une langue plus flexible & plus poétique s'améliorera presque dès sa naissance.

Les réflexions que j'ai faites ont peut-être expliqué pourquoi, malgré la protection dont la France honora les Lettres, elles y parurent si tard avec éclat, & pourquoi la langue Françoise, avant de se fixer, passa par tant d'états différens. Mais, depuis même qu'elle a pris une forme plus constante, peut-on dire qu'elle la conserve sans altération? La langue de Pétrarque & de Bocace a été celle de l'Arioste & du Tasse, & est encore aujourd'hui la langue des bons écrivains de l'Italie. A juger du sort de la langue Françoise par les changemens qu'elle continue à subir, on ne peut se flatter qu'elle soit si longtems invariable. Sortie plus lentement de la barbarie, elle en a conservé quelque teinte jusques dans son beau siecle; Malherbe, Corneille, & quelquefois Moliere & La Fontaine, ont des phrases impropres. Mais combien d'excellens tours & d'expressions qui ont vieilli dès leur naissance, qui quelquefois n'ont pas même été remplacés, & qu'on ne fait reparoître que pour leur accorder de vains regrets!

On ne peut dissimuler que la mode, cette divinité de la France, y regne jusques sur le langage. J'apperçois ici une contradiction inexplicable. La nation Françoise, plus qu'aucune autre, consulte l'usage de la langue; la question *cela se dit-il* est dans toutes les bouches;

ches; on semble craindre de hazarder de nouvelles expressions: qui ne croiroit après cela que la langue Françoise est plus stable que les autres langues? Néanmoins le fait atteste le contraire. Je ne m'arrête pas à expliquer cette contradiction, qui, après tout, est assez conforme à la nature de l'esprit humain; les zélateurs n'observent pas toujours les loix avec le plus de scrupule. Je me borne à remarquer l'empire de la mode sur cette langue; empire né de cette vivacité d'esprit qui produit de bons & de mauvais effets, & qui veut toujours se repaître d'objets nouveaux. Chacun se propose d'être original; & il est plus facile, surtout après que les matieres sont rebattues, de briller par la nouveauté des tours & des mots que par la nouveauté des idées. La nation Françoise est la plus sociable de toutes les nations: le désir de paroître, le feu de l'esprit, & quelquefois le hazard font éclorre des expressions nouvelles, qui, se répétant de bouche en bouche, passent en mode; leur regne est de courte durée, & il doit l'être; mais plus d'une fois elles ont éclipsé pour toujours les expressions qui tenoient leur place, & qui désormais sont surannées.

Il n'est pas de langue qui ne doive disparoître avec le cours des siecles. Les Lettres croissent avec les Empires, arrivent en même tems au plus haut période de leur gloire, & descendent ensuite d'un pas égal vers leur ruine. La chûte des Lettres est même plus rapide que celle des Empires; elles s'obscurcissent après avoir jetté le plus d'éclat: aussitôt la langue s'altere; l'étude est moins honorée; l'ardeur s'affoiblit de jour en jour, & il ne faut plus qu'une révolution pour entraîner dans le même tombeau & les Lettres & la langue. L'instabilité de la langue Françoise feroit craindre que, toute illustrée qu'elle est par de grands écrivains, & répandue dans toute l'Europe, elle ne soit la premiere, sinon à disparoître entierement, du moins à se corrompre. Qu'est-ce qui en a fait la langue universelle? C'est la splendeur de la Monarchie Françoise, le mérite de ses écrivains, & ces colonies nombreuses de

réfugiés dont la France a peuplé l'Europe. Or ces colonies s'éteindront tôt ou tard. Les écrivains François ne seront plus dans toutes les mains, dès qu'ils seront égalés par ceux des autres nations. Quand l'Italie tenoit le premier rang dans l'empire des Lettres, sa langue étoit celle de toutes les Cours; presqu'éclipsée par la langue Françoise, celle-ci éprouvera la même infortune.

J'avancerai ici une assertion qui n'est pas tout à fait étrangere à mon sujet, & qui, pour être paradoxe, n'en est pas moins vraie; c'est que l'incursion des Barbares, auxquels on attribue la chûte des Lettres, ne leur a pas été aussi nuisible qu'on le pense. N'avoient-elles pas considérablement décliné avant cette incursion? Quand une fois les Lettres penchent vers leur décadence, & que les mœurs de toute une nation sont corrompues, il est très rare qu'elle se releve; une langueur universelle s'empare des esprits, & les plonge dans un sommeil, qui ressemble à la mort. D'ailleurs, comme les beautés des ouvrages d'esprit & celles de la langue sont inséparablement liées entr'elles, quand on a épuisé ses tours les plus heureux & les plus frappans, il faut ou les répéter, ou les remplacer par des tours moins beaux & moins naturels. Les chef-d'œuvres même qui existent dans tous les genres, bien loin d'enflammer le génie, le glacent d'effroi, parce qu'il est trop aisé de faire le parallele. Qu'alors une nation barbare fonde sur ces contrées; ces eaux dormantes se purifient en s'agitant: du sein du cahos peut naître un nouveau monde. Les mœurs, que le luxe avoit efféminées, deviennent grossieres, même féroces: mais elles sont plus simples, & préparent la naissance des germes mâles du génie; on est ramené avec violence vers la nature dont on s'étoit tant écarté; sans doute la nuit s'épaissit d'abord: mais que servoit ce foible crépuscule qu'on prenoit pour la lumiere? Après cette nuit on est plus frappé du jour: on écrivoit mal dans une belle langue, & tout sembloit épuisé; avec une langue nouvelle renaîssent les Lettres; on peut encore être original, même en suivant des modeles; chaque

langue ayant un génie qui lui eſt propre, on produit des tours énergiques & nouveaux; le parallele eſt trop éloigné pour qu'il épouvante; on peut aſpirer par ſes talens à être le premier dans ſa patrie; & le deſir & l'eſpoir de cette gloire éclatante enflammant tous les eſprits, on voit reparoître les Virgile & les Horace.

Cependant pluſieurs circonſtances peuvent s'oppoſer à cette renaiſſance des Lettres, ou la favoriſer. Une nation moins barbare amenera des ténebres moins profondes; la langue nouvelle ſe formera plutôt, à proportion de ſon analogie avec la langue ancienne. La priſe de Conſtantinople par les Turcs lui a été fatale; leur chef étoit éclairé; mais le peuple étoit plongé dans la barbarie la plus épaiſſe, &, ce qui eſt plus funeſte encore, le deſpotiſme enchaîne le génie.



DISCOURS
SUR
LA PHYSIONOMIE
ET LES AVANTAGES DES CONNOISSANCES PHYSIONOMIQUES.
PAR DOM PERNETY (*).

Tout ce qui frappe nos yeux, tout ce qui fait impression sur notre esprit, commence par nous intéresser. Nous sentons d'abord que ce qui n'est pas nous, a cependant un rapport avec nous, qu'il peut contribuer à la conservation, ou à la destruction de notre existence. A cet instinct, ou sentiment intérieur, se joint ensuite l'expérience, qui nous apprend à distinguer les objets nuisibles, de ceux qui nous sont avantageux. Mais, quand on a quelque chose de plus que la figure humaine, quand on sait penser, on en saisit les plus petites nuances, & l'on est frappé non seulement par l'utile, mais par l'agréable. On devient curieux, & si peu que l'on ait de dispositions pour acquérir des connoissances, quel plaisir à s'instruire de ce qui paroit digne de notre curiosité! Hé! quel est l'objet de l'Univers, qui ne pique pas celle d'un esprit capable de pénétrer dans le sanctuaire de la Nature? Peu y sont admis. Le nombre de ceux qui savent lever le voile tendu sur les yeux des autres hommes, est bien petit. Mais elle a infusé dans tous le germe des sciences utiles; & dans quelques uns seulement l'inclination & les dispositions pour les cultiver. Seroit-il moins honteux d'ignorer, qu'il est flatteur de connoître, ce qui a fait dans

(*) Lu le 8 Décembre 1768 & le 9 Fevrier 1769.

dans tous les tems, & qui fera toujours l'occupation la plus instructive, la plus utile & la plus agréable?

De toutes les sciences la physionomique est la plus étendue. Elle est le fondement de toutes les autres; elle est la science universelle, si on la considere dans toute la rigueur du terme.

Nos connoissances sont fondées, ou sur nos propres observations, ou sur celles des autres, auxquels nous accordons, & souvent trop légerement, notre confiance; comme s'ils avoient été chargés de penser & de réflêchir pour nous. Nos jugemens, suite de ces observations, ont pour base les différences, ou les rapports, que les choses ont entre elles. Ces différences & ces rapports sont des traits, des linéamens, des signes caractéristiques & distinctifs, par lesquels nous jugeons que deux choses ne sont pas la même; mais que chacune est telle individuellement. Sur la forme, la couleur, nous nous rappellons les connoissances acquises des parties constituantes du mixte, de leur combinaison, de ses qualités, de ses propriétés, de l'usage que l'on peut en faire pour la conservation & le bien-être, ou pour la destruction de notre individu.

La Physique, science fondée sur la considération des corps naturels, eu égard à leur matiere, à leurs causes, à leurs effets, n'est donc proprement que la science physionomique de la Nature; & cette science se divise en autant de genres, ou d'especes, qu'il y a de sciences physiques, ou particulieres. Elles ont pris leurs noms des choses qui en sont l'objet. Est-ce le ciel, les astres, que nous observons? c'est l'Astronomie, ou la science physionomique du ciel. Malheureusement nous avons la vûe trop courte; ces objets sont trop éloignés de nous, pour qu'il nous soit facile d'en observer tous les traits avec la derniere exactitude; d'assigner avec précision les rapports de toutes leurs parties; de déterminer leur situation, & leurs différens mouvemens; de décider sur leurs qualités essentielles, ou respectives entre elles, ou rélativement à la Terre. J'admire à ce sujet, combien nous nous fuyons nous-mêmes; combien nous négli-

geons la connoiſſance des objets qui nous intéreſſent bien davantage, & qui nous touchent de ſi près, pour nous occuper de ceux qui ſont ſi loin de nous. Leurs mouvemens & leurs effets ne ſeront jamais aſſujettis à nos déſirs, ni à nos volontés. Auſſi des obſervations les mieux combinées, les plus ſuivies, qu'eſt-il réſulté? Entre tant de ſyſtêmes, trois ſeulement ſe diſputent la palme, malgré leur incompatibilité. Ils ſont même hériſſés de tant de difficultés, qu'ils ne nous préſentent que des lueurs de vraiſemblance plus ou moins probables.

En portant nos obſervations dans cet eſpace immenſe, qui ſépare le ciel du globe ſur lequel nous nous promenons, nous y conſidérons l'air & ſes météores; leurs poſitions, leurs couleurs, leurs figures, leurs mouvemens: nous prévoyons le beau tems, la pluie, les tempêtes, & ce que nous devons en eſpérer, ou craindre. Sur ces obſervations les gens de la campagne reglent leurs travaux; &, dans le fond, plus inſtruits que nous, ils ne ſe trompent gueres dans leurs conjectures, fondées, comme les nôtres, ſur les ſignes extérieurs.

Nos regards tombent-ils ſur la Terre? Au premier aſpect nous décidons que telle partie de ce globe eſt de la pierre; celle-là de l'argile, propre à faire des briques, de la poterie &c. celle-ci de la terre franche, dont la culture donnera des fruits, pour notre ſubſiſtance. Des yeux plus inſtruits & plus clairvoyans jugent aux ſignes extérieurs qui caractériſent chaque choſe, que telle maſſe de matiere contient de l'or, une autre de l'argent, ou tout autre métal; que cette croute raboteuſe, informe, & ſans éclat couvre un diamant, cache un rubis; que cette pierre, dont le brillant & la couleur d'or en imposeroient à des yeux ignorans, n'eſt qu'une marcaſſite ſulphureuſe, abſolument dénuée de ce riche métal qu'elle ſemble étaler.

Par le ſecours d'un œil obſervateur, on deſcend des propriétés reconnues communes à tous les corps juſques aux propriétés particulieres, la couleur, l'odeur, la ſaveur, la dureté, la légereté, le ſon &c. On ſe trompe quelquefois; mais l'erreur a toujours ſa ſource dans le défaut d'expérience, dans la précipitation de nos jugemens, ou dans

les

les illusions que l'art opere, lorsqu'il est parvenu au point de bien imiter la Nature. Il n'en impose cependant jamais à des yeux éclairés & défians, à un observateur instruit & attentif.

Que de l'intérieur de la Terre on monte à sa surface; les yeux, en y promenant leurs regards, sont frappés de la variété des plantes. On y considere les formes, leur grandeur, les figures de leurs tiges, de leurs feuilles, leurs fleurs, leurs semences. Ces signes extérieurs servent de base à la distribution que l'on en fait en différens genres & especes. Fondés sur des observations, & sur l'expérience, on leur assigne des vertus, des propriétés, d'où résulte enfin la science du Botaniste, ou la science physionomique des végétaux.

Soit par simple curiosité, soit par cet instinct naturel qui veille toujours à notre conservation, nous ne sommes pas moins portés à connoître cette quantité prodigieuse d'êtres vivans, qui peuplent l'Air, l'Eau & la Terre. Amis, ou ennemis reconnus de l'homme, pour les faire distinguer comme tels, on leur a donné des noms, pris de leurs figures, de leurs cris, ou du caractere propre à chacun d'eux. Signes extérieurs, caracteres physionomiques, sur lesquels sont établis les premiers élémens de nos connoissances, eu égard à l'histoire naturelle des animaux.

Les loix enfin, la maniere de les pratiquer, & les usages font la physionomie d'un Etat. La Politique est l'art de la connoître: c'est l'étude du monde. Par cette étude bien approfondie, on auroit le génie familier de Socrate. L'attention de ce Philosophe sur le présent, ses réflexions sur le passé, & ses conjectures, qui en étoient une suite, le rendirent plus clairvoyant dans l'avenir que les plus profonds Astrologues, & plus éclairé dans les choses présentes que les plus rusés Politiques. L'Histoire même est-elle autre chose que la physionomie du tems passé?

Faut-il entrer dans le détail des autres sciences qui s'acquierent par les yeux & les observations? Je ne le pense pas. Personne ne

ne me contestera que réunies elles ne soient proprement la science physionomique de la Nature. Tout porte à l'extérieur un signe hiéroglyphique, au moyen duquel un observateur en fait très bien connoître les vertus secrettes & les propriétés.

Ces sciences, chacune en particulier, procurent à l'Humanité de grands avantages; doutera-t-on de ceux qui résultent de la connoissance de l'individu le plus noble & le plus parfait qui soit sur la Terre? N'est-ce pas déjà les avouer, que de restreindre à l'art de connoître les hommes, la signification du terme, *Physionomie*? Science, qui sans doute a pris son nom de l'excellence de son objet, de l'utilité que l'on peut en attendre, & de ce que l'homme étant, pour ainsi dire, l'abrégé du grand monde, étudier l'homme, & le connoître, c'est acquérir des connoissances rélatives à tout l'Univers?

Entrer dans le détail des preuves de cette proposition, ce seroit sortir de l'objet de ce Discours. D'ailleurs d'autres en ont fait les frais. Ce ne seroit pas le renfermer dans les bornes de la signification propre du terme Physionomie, & dans la preuve des avantages attachés à la connoissance des hommes; à cet art qui apprend à découvrir leurs inclinations, même les plus secrettes, les émotions habituelles de leurs ames, & les effets qui en résultent; conséquemment leurs vertus, & leurs vices.

La Physionomie consiste dans les traits, les linéamens, la configuration extérieure du visage & des autres parties du corps humain, dans son maintien, en mouvement, ou en repos.

Considérée dans cette variété presqu'infinie de la combinaison des traits qui composent les différentes physionomies des hommes, la science physionomique ne sauroit être l'étude d'un particulier. Un homme dût-il vivre autant que durera le monde, il ne lui seroit pas possible de passer en revue tous les individus de l'humanité. Quand il le pourroit, seroit-il assez clairvoyant pour saisir tous les traits, toutes les nuances qui les différencient, & qui font que l'on n'en trouve-

roit peut-être pas deux qui se ressemblent parfaitement? Et puis que résulteroit-il d'une étude aussi seche? l'admiration? Nous avons bien plus lieu de nous émerveiller de la différence de visage du même homme, comme s'il en avoit plusieurs de rechange, pour en user, à la maniere d'un masque, suivant les circonstances.

Voyez le visage d'un homme dont les traits & les linéamens se modelent, s'arrangent sur les vrais mouvemens du cœur, sur la simple impulsion de la Nature. Considérez ensuite le même visage fardé par l'hypocrisie, par la fourberie, dont les traits sont affectés & composés pour tromper. Dieu! quelle différence!

Mais seroit-il avantageux, ou nuisible, de connoître l'intérieur des hommes par ces signes extérieurs, de juger de leurs qualités, tant bonnes que mauvaises, à la seule inspection de leur physionomie? Tous ne sont pas du même avis sur cette question; & je ne sai pas trop pourquoi. Je n'y vois que des avantages. Soutenir le contraire, n'est-ce pas se refuser au cri, à l'instinct de la nature; contredire sa propre expérience, celle de tous les hommes & de tous les tems? C'est avoir oublié, ou vouloir méconnoître les avantages inséparables des connoissances plus étendues des secrets de cet Art.

Mr. de Catt a traité cette matiere avec tout l'esprit possible, dans son Discours qui a été lû dans cette Académie. Mais il a jugé à propos de laisser la question indécise. Ses raisons en faveur des avantages que l'on peut tirer des connoissances physionomiques, me paroissent cependant si victorieuses, & les contraires si foibles, que je suis surpris de son indécision. Me seroit-il permis d'ajouter quelques réflexions aux siennes, pour démontrer avec plus d'étendue ces avantages; & d'examiner, seulement en passant, le peu de force des raisons contraires?

La Physionomie est un tableau vivant très expressif, où la Nature développe & présente à nos yeux les traits qui caractérisent chaque homme en particulier. Exempte d'intérêt & d'ignorance elle exprime

prime toujours le vrai, & le fait percer à travers cette couleur empruntée de la dissimulation, ce masque de la fourberie sous lequel l'art s'efforce envain de le cacher. Aux yeux d'un homme ordinaire, accoûtumé à être dupe des apparences, ce masque en impose & fait illusion. Aux yeux d'un simple observateur c'est un nuage léger. Mais pour un homme né physionomiste, ce masque n'est qu'une vapeur subtile, qui se dissipe à l'approche des rayons lumineux du flambeau de la Nature. En s'évanouissant, elle laisse voir le vrai dans tout son éclat. C'est une ombre dans le tableau, qui fait valoir les clairs.

A voir les sociétés d'aujourd'hui, ne diroit-on pas que les hommes ne s'assemblent que pour jouer au Colin-Maillard? Chacun s'empresse de mettre le bandeau sur les yeux de son voisin. On s'exerce, on s'applique à donner le change, pour n'être pas connu. On donne en effet dans le pot au noir; on se casse le nez dix fois, avant même que d'avoir saisi le premier objet qui nous tombe sous la main. Au moment que nous pensons le tenir, il nous échappe. Le tenons-nous? quel embarras, quelle difficulté pour réussir à deviner précisément la personne, sous le son de voix affecté, sous les postures grotesques, & sous l'habit emprunté avec lesquels elle se présente!

Voulez-vous deviner juste? Apprenez à connoître les hommes. Comme vous ils aspirent au bonheur; mais la plûpart s'imaginent y parvenir avec le secours de la fourberie. Les passions qui les tourmentent, & qu'ils veulent déguiser, produisent l'émotion de l'ame. A cette émotion succede le mouvement des esprits, le jeu des ressorts. L'union intime du corps & de l'ame occasionne une succession si promte & si nécessaire de ces effets, que la volonté même n'en sauroit arrêter le cours, ou en couper le fil.

Prétendre donc composer son visage, & en former un masque trompeur, qui puisse cacher les mouvemens de l'ame & du cœur, l'effet des passions, c'est s'abuser soi-même. Des rayons s'élancent de toutes les parties du visage, & surtout des yeux de celui que nous observons. Ils portent leur lumiere jusques dans le fond du siege de

 nos

nos connoiſſances: le nuage ſe diſſipe, le maſque tombe, & le fourbe eſt à découvert.

Un homme diſſimulé veut-il maſquer ſes ſentimens? il ſe paſſe dans ſon intérieur un combat entre le vrai qu'il veut cacher, & le faux qu'il voudroit préſenter. Ce combat jette la confuſion dans le mouvement des reſſorts. Le cœur, dont la fonction eſt d'exciter les eſprits, les pouſſe où ils doivent naturellement aller. La volonté s'y oppoſe, elle les bride, les tient priſonniers; elle s'efforce d'en détourner le cours & les effets, pour donner le change. Mais il s'en échappe beaucoup; & les fuyards vont porter des nouvelles certaines de ce qui ſe paſſe dans le ſecret du conſeil. Ainſi plus on veut cacher le vrai, plus le trouble augmente, & mieux on ſe découvre.

Conſidérez avec attention Pandol. Il ſe préſente à vous ſous le manteau de l'amitié, pour vous faire ſervir à ſon ambition, ou vous faire dupe de toute autre paſſion qui l'agite. Il ſait bien que ce manteau eſt d'une étoffe très-légere, très-claire, qu'il eſt court, & trop étroit. Il fait tout ce qu'il peut pour s'en couvrir en entier; mais craignant en même tems que vous ne vous apperceviez de la ruſe, il cherche à diſtraire vos regards, il n'oſe vous enviſager; ſes yeux ne ſe fixent point ſur les vôtres. Si l'effronterie l'a un peu habitué à ſe vaincre là-deſſus, voyez ſon regard peu aſſuré: conſidérez les nuages qui ſe ſuccedent dans ſes yeux. Le vrai qu'il veut cacher, & le faux qu'il voudroit étaler, y paſſent en revue & s'y diſputent à qui s'y montrera le mieux. Si vous ne prenez pas mon fourbe ſur le fait, comptez que vous voulez être dupe, ou vous êtes bien fait pour l'être.

Combien donc de grimaces, de poſtures étalées inutilement, pour cacher ſa façon de penſer? Ces mouvemens de têtes affectés, ces différentes figures, que les yeux, le nez, la bouche ſe donnent, portent à faux. On veut affecter de n'être pas ſenſible à une injure, pour empêcher celui qui l'a faite de ſe précautionner contre la vengeance que l'on en médite. L'ame émue travaille néanmoins dans l'in-

l'intérieur: cette insensibilité affectée donnera un air de modestie, fera baisser les yeux; mais la rougeur, compagne de la honte, décelera l'impréssion que le cœur a reçue de l'injure. La colere y travaille déjà. Ne pouvant élever les paupieres, comme elle a coûtume de le faire, parce que la dissimulation en bride les mouvemens; l'ame agit cependant, & le cœur fait son office. L'affluence des esprits entrecoupe un peu la parole, enflamme le visage, & donne aux yeux un air de vivacité, qu'ils n'auroient pas si l'ame étoit véritablement tranquille. Ce sont des mouvemens involontaires; mais ils sont une suite des desseins de la Nature, qui ne se plie jamais entierement aux ordres de la volonté, quand celle-ci veut la contraindre.

La méchanique que l'ame emploie, est donc l'agitation des esprits. Cette agitation produit celle des humeurs & le mouvement des parties, tant de celles qui sont soumises aux ordres de la volonté, que de celles qui ne le sont pas. Celles qui obéissent à la volonté, ne suivent ses ordres qu'à regret, lorsqu'ils contredisent les loix & les impressions de la Nature, amie du vrai. Ennemie de toute supercherie, elle ne se prête jamais de bonne grace aux mouvemens que la fourberie imprime à nos ressorts. Forcée, elle proteste contre la violence qui lui est faite; d'où résulte cet air emprunté, qui dénonce le masque.

Non: Socrate n'y avoit pas bien réfléchi, quand il désiroit que la Nature eût pratiqué une ouverture à la poitrine, vis à vis du cœur des hommes, pour pouvoir y lire leurs pensées & leurs desseins. En pénétrant même jusques dans les plus profonds replis du cœur, qu'y auroient vû les yeux les plus fins? Le mouvement des parties, & rien de plus. Il eût fallu raisonner sur ces mouvemens, les analyser, les combiner, pour en tirer des conséquences sûres par rapport à la qualité des pensées ou des sentimens du moment. L'expérience jointe à une étude consommée, auroit été absolument nécessaire pour débrouiller ce cahos; pour juger avec certitude de ce qui devroit résulter du plus ou moins de ces mouvemens, & qui les varie à l'infini.

Socrate eut tout lieu de se convaincre dans la suite, par sa propre expérience, que la Nature y a pourvû par un moyen plus abrégé, & plus certain, que celui d'une ouverture à la poitrine. Zopyre le lui prouva; ce Zopyre, qui ne concevoit pas comment ceux qui avoient des yeux, ne lisoient pas sur la physionomie de Socrate, que ce Philosophe avoit beaucoup de penchant aux vices. Socrate de bonne foi avoua que Zopyre disoit vrai, & que c'étoit les réflexions & la pratique de la Philosophie, qui l'avoient précautionné contre ses mauvais penchans.

Ne seroit-ce pas ce qui auroit engagé Socrate à étudier sa propre physionomie dans un miroir, soit pour se corriger lui-même, en apprenant à se connoître, comme dit Séneque, soit pour devenir savant dans l'art de connoître les hommes? L'Histoire nous apprend que cet art fut en grande recommandation dans l'école de ce Philosophe, & dans celle de Pythagore.

Les Anciens étoient bien plus avisés que nous à cet égard. Persuadés des avantages attachés à cette science, ils donnoient tous leurs soins pour l'apprendre aussi parfaitement qu'il est possible. Les Pythagoriciens, si nous en croyons Jamblique, n'admettoient dans leur société ceux qui s'y présentoient, qu'après avoir considéré leur figure, leurs gestes, leur démarche, leur maintien, enfin toute l'habitude du corps: afin de pouvoir juger s'ils étoient propres, ou non, à y être reçus; & s'ils avoient les dispositions requises pour l'étude des sciences. La sage Nature en effet, en bâtissant le logement, le pourvoit sans doute de tout ce qui est nécessaire à celui qu'elle destine pour l'habiter. Sur ce principe, Socrate rejettoit tous ceux en qui il ne voyoit pas une aptitude décidée, & un bon naturel. Il devint si connoisseur en physionomie, qu'il prédit à Alcibiade sa promotion aux plus grandes dignités de la République.

On peut donc acquérir cette science par les observations, comme toutes les autres. Mais pour y réussir parfaitement, il faut être né Physionomiste, comme il faut être né Poëte. Le sentiment intime en

en indique plus, que les regles. L'esprit humain, dit Ciceron, s'enveloppe sous des apparences trompeuses, & s'en couvre comme d'un voile. Le front, les yeux en imposent aux yeux, & le discours simulé aux oreilles. Sous ce beau dehors, dit aussi Séneque, est souvent caché un caractere pervers, brutal, & souvent plus féroce que celui-même des bêtes.

Quelquefois aussi un visage, dont les traits en général ne flattent pas l'œil du spectateur ordinaire & peu attentif, présente à celui que la Nature éclaire, des traits caractéristiques d'un brave homme, d'un homme fait pour la société. Les premiers en feroient la peste, si leurs figures perfides trompoient tout le monde; mais heureusement le voile tombe, dès que le physionomiste le considere de près. Bel Enfant, disoit Virgile, n'ayez pas trop de confiance dans votre beauté; nous n'en sommes pas la dupe: nous découvrons, sous cette belle apparence, le peu que vous valez.

Dans le choix que les Gymnosophistes faisoient des hommes, pour leur mettre la couronne sur la tête, ils n'avoient égard ni à la noblesse du sang, ni aux richesses, ni à la puissance, dont les hommes étoient pour le moment en possession. Ils donnoient la préférence à ceux dont la physionomie étoit la plus avantageuse, la plus belle, dont tous les membres étoient bien proportionnés; dans la conformation desquels on eût dit que la Nature avoit paru se complaire. Ils s'imaginoient qu'elle avoit infusé dans ceux qu'elle avoit ainsi favorisés, un principe de vertus, de bonnes qualités, d'excellence, qu'elle n'avoit pas départi à ceux qu'elle avoit disgraciés. Ne diroit-on pas, en effet, que cet accord des parties, ces traits faits pour charmer, annoncent un germe de vertus, qui ne demande qu'à se développer; qu'à porter tous les fruits avantageux à la société, qu'elle a droit d'en attendre?

Chez les Spartiates, on ne confioit pas l'éducation des enfans à leur pere. On les faisoit élever aux dépens de la République, dans un lieu, où avant que de les admettre, on les examinoit très-scrupuleusement

ment. Ceux dont le corps étoit robuste & vigoureux, ceux, en un mot, qui méritoient les suffrages des Physionomistes préposés à cet examen, y étoient élevés avec tous les soins possibles. Les enfans foibles, ou difformes, ceux dont les traits annonçoient un mauvais caractere, étoient précipités dans le Taygete, comme des sujets qui deviendroient à charge à eux-mêmes, & pernicieux à la République.

Exister est un grand bien; mais exister à la charge de soi-même, & au désavantage des autres, est le plus grand des maux. Exister isolé, ce n'est pas sentir son existence: *væ soli*! Il faut exister heureux. C'est l'objet que les hommes se proposent, le but auquel ils aspirent tous, & que chacun cherche par la voie qu'il croit la plus propre à l'y conduire.

L'homme est donc fait pour la société; & aucun animal n'est plus social, ni moins social que l'homme. Les uns font tout l'agrément de la société, les autres toute l'amertume. La plûpart de ceux-ci ressemblent à des pillules dorées, qui contiennent un poison mortel sous cette enveloppe trompeuse. On le sait; on s'en défie quelquefois: mais ce n'est pas assez. Mettez-vous en état d'analyser ces pillules, vous en découvrirez bientôt le poison. Est-il un homme qui puisse se flatter de n'y avoir pas été surpris, qui n'ait pas lieu de se plaindre de s'être trompé dans le choix qu'il a fait de ceux avec lesquels il s'est lié de société? Ignore-t-on que, dans le grand nombre, il en est plus dont le commerce est perfide, désavantageux, qu'il n'en est dont on puisse espérer la douceur & les agrémens de la vie? Non: on avoue même l'embarras où l'on se trouve, quand il faut faire le choix d'un petit nombre de personnes, dont la fréquentation ne traîne pas à sa suite la tristesse, le chagrin.

Avoir des amis, mais de vrais amis, voilà la félicité de la vie. L'expérience nous prouve que nous courons sans cesse après ce bonheur, & que bien peu l'atteignent. Le tiers de la vie s'est écoulé, avant que l'on soit en état d'ouvrir les yeux, ou d'en ouvrir d'assez clair-

clairvoyans fur les objets de notre choix. L'autre tiers fe paffe à étudier, à éprouver ceux à qui nous avons donné la préférence. Heureux encore celui qui devient prudent & fage, à force d'avoir été dupe! Le grand nombre de ceux qui nous ont trompés, nous habitue à une déplorable incertitude, qui nous tient toujours en l'air & nous empêche de former aucune intimité.

Ayez, nous dit-on, trois chofes toujours ouvertes pour vos amis, favoir la bourfe, le cœur & le vifage; mais affurez-vous de leur fidélité. Ce dernier avis eft de la premiere importance, & le fera toujours, tant que, dans la vie civile, l'art de tromper fera partie de l'éducation. Comment donc trouver fon bonheur dans la fociété? A confidérer combien les hommes font efclaves de leurs paffions, combien ils font ambitieux, & fordidement attachés à leurs intérêts, on trouvera que la maxime dont je viens de parler, a bien fon mérite. Elle doit être la reffource au moins de ceux qui n'ont pas le tact affez fin pour connoître les hommes à la phyfionomie.

Cependant mettre les hommes à de fortes épreuves, pour les connoître parfaitement, n'eft pas, à mon avis, un moyen auffi infaillible que le penfe Mr. de Catt. Si le fourbe a de l'efprit, il fentira qu'on veut l'éprouver, il éventera la mine, & ne fe démentira pas. Preuve bien fenfible de la néceffité, & des avantages de la fcience phyfionomique.

Mais la connoiffance la plus parfaite des phyfionomies, ajoute Mr. de Catt, ne difpenferoit pas de ces épreuves. Le croira-t-on, fi on la fuppofe parfaite? C'eft l'imperfection qui réfulte de l'inapplication à cette fcience, & de fon non-ufage, qui rend ces épreuves néceffaires. Car fi elle devenoit auffi à la mode, que l'art de mafquer fes fentimens; & qu'elle fût pouffée auffi loin qu'elle peut l'être, l'art de fe déguifer tomberoit de lui-même; fa pratique deviendroit inutile, & les épreuves fuperflues. On ne verroit pas, comme le dit très bien le même auteur, l'homme de probité obligé de juftifier fon titre par

par des actions suivies, dont souvent on ne lui fournit pas les occasions. En attendant, le particulier & le public sont privés des services qu'un honnête homme leur procureroit.

Pour se bien conduire aujourd'hui dans la vie civile, il faut beaucoup de prudence: & cette prudence, dit-on, consiste autant à cacher ses desseins, qu'à pénétrer ceux des autres. Etrange maxime, faite pour la honte des hommes qui se prétendent civilisés! La conduite dans le commerce du monde, n'est-elle donc qu'une chasse de ruse, où l'on cherche toujours à tromper, ou à surprendre!

Je vous plains, vous que la sincérité & la franchise accompagnent partout. Je vous plains d'être obligés de vivre avec ces loups & ces renards, couverts de la peau de l'agneau, si vous n'apprenez à les connoître sous ce déguisement. Vous qui avez été si souvent la victime de ce masque trompeur, dites-moi s'il est avantageux d'apprendre l'art de connoître les hommes à leur physionomie? Hommes vrais, vous n'avez pour vous que la satisfaction de sentir & de ne pas éprouver combien il doit en coûter à un homme, & quel tourment ce doit être pour lui d'avoir toujours l'esprit tendu, l'imagination aux champs, & toutes ses facultés à la torture, pour réussir à cacher ses sentimens, & à démasquer ceux des autres. Triste nécessité que celle de passer sa vie au milieu de tant de masques! On y apprend à ne se fier qu'à soi, à n'aimer que soi: on devient insensible sur le sort des autres; on quitte les hommes le cœur vuide d'amitié, de cette affection, ce lien des cœurs, qui fait le bonheur de l'humanité. On les quitte, l'esprit peu satisfait de leur commerce; & l'on meurt enfin isolé, & aussi oublié que si l'on n'avoit pas été du nombre des vivans.

L'homme étant essentiellement fait pour la société; & la Nature ayant placé le bonheur de l'homme dans l'union des cœurs, qui fait le lien de la société, pourquoi tant d'hommes entendent-ils si peu leurs véritables intérêts, que les uns fuient, & que les autres travaillent

lent sans cesse à rompre, à détruire, à anéantir cette union, cet accord de sentimens & d'actions qui en fait la base, l'agrément & la douceur? Vous qui fuyez, ce semble, la société, je vous le pardonne. Vous vous en éloignez sans doute, par haine pour la fourberie & la dissimulation. Non, ne la fuyez pas: hors d'elle point de félicité. Le mal que vous fuyez, n'est pas sans remede. Il en est un spécifique, l'art de connoître les hommes aux traits de leurs visages. Apprenez cet art: arrachez ce masque perfide; & qu'il ne reste à celui qui le portoit, que la honte d'en avoir fait usage. Sincérité, franchise, fruit précieux de l'art de dévoiler les hommes, réduit en pratique, vous reviendriez habiter parmi nous, vous formeriez; vous cimenteriez cette union, cet accord de sentimens & d'actions, qui font le bonheur de la vie!

Il y a tant de plaisir à faire du bien, à sentir, à reconnoître celui qu'on reçoit; tant de contentement à marcher tête levée, à suivre les mouvemens d'un cœur droit, à pratiquer la vertu, à être doux, humain, tendre, charitable, franc, sincere, compatissant, généreux, que tous les hommes s'empresseroient de le devenir, si les chemins étoient ouverts pour cela, s'il étoit permis & nullement dangereux de se montrer tel que l'on est, dans le commerce du monde. On le deviendroit en effet, si la dissimulation en étoit bannie.

Voulons-nous donc vivre heureux, au moins le dernier tiers de notre vie? Apprenons à connoître sous ce masque de faux, le vrai qui en fait la doublure. Je l'ai dit, elle se montre toujours par quelqu'endroit. Et puisque rien ne nous intéresse tant que notre propre bonheur, rien ne peut nous intéresser davantage que cette connoissance. Imitons les anciens au moins en cela. Avant tout ils se proposoient la connoissance, non de l'homme comme homme; elle n'auroit eu pour objet que l'humanité en général; ni celle de l'homme comme individu animal, eu égard à ses infirmités ou à ses perfections corporelles; mais celle de l'homme comme membre de la société, pour laquelle l'homme a été fait, au bonheur duquel tous les autres membres de la même société doivent concourir, comme il doit travailler de son côté à procurer celui de ses semblables.

Soyons perſuadés, comme les anciens, des avantages qu'il y a à ſavoir dire ſur l'inſpection des traits de la phyſionomie: voilà un Therſite, ou un Hector; un Catilina, ou un Fabius. Faute de cette connoiſſance, combien de fois ſommes-nous expoſés à prendre pour nos amis les plus attachés & les plus fideles, des Therſites impudens, des Ulyſſes ruſés, des Catilinas turbulens & ſéditieux? Voyez le ſort de cet homme, qui, pour être privé de cette connoiſſance, n'a pour amis que cette foule d'eſprits rampans & mercenaires, qu'il ne doit qu'à ſa fortune: amis lâches, qui l'enivrent tous les jours par l'encens qu'ils lui prodiguent & l'empoiſonnent par leurs complaiſances affectées. Voyez le triſte avenir qu'il ſe prépare, ſi la fortune ceſſe de le regarder de bon œil.

Convenez avec moi qu'il eſt bien avantageux de connoître les hommes, ſans avoir acquis cette connoiſſance aux dépens de ſa tranquillité, & ſans avoir fait la triſte expérience de la fourberie de ceux qui ſouvent n'ont d'autre mérite que celui de ſavoir déguiſer leurs véritables ſentimens.

Hommes vicieux, qui faites conſiſter votre bonheur à vous enivrer d'adulations! Homme de peu de génie & de talens, qui ſavez ſi peu eſtimer les choſes ce qu'elles valent, ouvrez enfin les yeux: connoiſſez ceux que vous fréquentez pour ce qu'ils ſont; & mettez-vous à l'abri du mépris que vous & eux méritez à ſi juſte titre.

Le déſir de mériter l'eſtime & l'amour des hommes eſt né avec nous. Il nous rend ſociables; il nous apprend que, ſi l'homme doit ſentir une injure, l'homme ſage ne doit pas ſe contenter de la diſſimuler; mais la pardonner. Il nous rend bienfaiſans, complaiſans; mais jamais ce ne doit être juſqu'à la flaterie.

Quel Prince ne ſait pas, dès ſon enfance, qu'il eſt Prince? Les adulateurs ne ceſſent de lui répéter qu'il eſt fait pour commander aux hommes. Il eſt environné de gens qui lui crient perpétuellement aux oreilles: Tout eſt à vous. En voit-il qui le fatiguent

pour

pour lui dire trop souvent : Votre personne est à l'état ; votre tems est au public. Vous ne serez estimé & aimé, qu'autant que vous serez le bien, & le bien de votre Peuple. Vous ne pouvez pas tout savoir, ni tout faire. Pour votre honneur, & pour le bien de votre état, choisissez-vous des Ministres ; mais des Ministres sinceres, fideles, intelligens ! Heureux le Prince qui en a de tels ! Mais comment faire ce choix ? Comment les démêler dans ce nombre de flatteurs qui l'assiegent continuellement ; qui ne s'occupent jour & nuit qu'à masquer la vérité, & à éloigner du Thrône ceux qui pourroient en devenir l'appui ? Aristote en sentoit si bien l'embarras & la difficulté, qu'il recommandoit à Alexandre d'avoir recours à l'art de connoître les hommes par leur physionomie. Ne seroit-ce pas dans cette vue que l'on constituoit autrefois dans la cour des Rois, des gens pour examiner les personnes ; discerner les esprits ; & rendre un compte fidele de leurs observations ? Aristote, dans son Traité de la Politique, exhorte à choisir des Magistrats dont la figure soit noble & prévenante. Dans un autre endroit, il conseille de fuir le commerce de ceux qui sont disgraciés de la Nature, ou marqués de quelques signes extraordinaires. De là, sans doute, le proverbe :

Distortum vultum sequitur distortio morum,

& cette maxime d'un Poëte Grec :

Pes tibi quod claudus, quod clauda per omnia sit mens,
Interius retegunt extera signa malum.

Ces proverbes ne sont pas toujours vrais. Socrate nous prouve par sa figure, qu'il ne faut pas toujours juger défavorablement des personnes, sur leur physionomie peu flatteuse & peu prévenante au premier coup d'œil. Ecoutons Rabelais dans son prologue de la vie de Gargantua : „Tel, au dire d'Alcibiade, étoit Socrates, parce qu'en „le voyant au dehors, & l'estimant par l'extérieure expérience, n'en „eussiez donné un coupeau d'oignon, tant laid il étoit de corps, & ri„dicule en son maintien : le nez pointu, le regard d'un taureau, le vi-

 „sage

„sage d'un fol; simple en mœurs, rustique en vêtemens, povre de „fortune, infortuné en femme, inepte à tous offices de la République; „toujours riant, toujours beuvant, toujours se gabelant, toujours dis- „simulant son divin savoir. Mais, ouvrant cette boëte, eussiez trouvé „une céleste & impréciable drogue, entendement plus qu'humain, „vertu merveilleuse, courage invincible, sobresse non pareille, con- „tentement certain, assurance parfaite, déprisement incroyable de tout „ce pourquoi les humains tant veillent, tant courent, travaillent, na- „vigent & bataillent."

Aucun homme cependant, dit Aristote, (2 priorum) n'a un penchant que la Nature n'ait scellé par un signe extérieur & visible sur son corps &c. (Lib. de Physiogn. Cap. 1.) Il n'est pas plus difficile de connoître les hommes à l'inspection des traits de leurs visages, que de juger de la qualité des chevaux & des chiens de chasse. Aussi les hommes ne different-ils pas par la forme essentielle à l'homme; mais par des signes accidentels. Cette différence suffit pour juger de celle de leurs penchans; & conséquemment de leurs mœurs.

Il y a un rapport immédiat & déterminé entre les émotions de l'ame & les mouvemens du corps, qui en sont la suite; puisque les effets ont ce rapport avec leurs causes. Ces mouvemens du corps sont donc l'image des émotions de l'ame, des impressions qu'elle reçoit, & des agitations qui en sont une suite.

Le cœur est le principal organe de l'appétit sensitif, le cerveau l'est de l'imagination. L'idée du bien que nous désirons, se forme dans celle-ci. Les esprits que l'ame envoie au devant de ce bien, partent du cœur, & sont portés au lieu où elle voit son objet. Arrivés au cerveau ils en agitent les fibres. Ces fibres communiquent leur mouvement aux nerfs, ces canaux si déliés, qui y prennent leur origine, aux muscles, ressorts de toute la machine. Ceux du visage étant les plus délicats, ils sont sensibles à la moindre impression.

Quelque secrets que soient les mouvemens de l'ame, quelque soin que l'on prenne, quelque effort que l'on fasse pour les cacher, à mesure

mesure qu'ils se forment, ils causent une altération sensible sur le visage. On a beau se composer; l'ame, sans s'appercevoir même de ce qu'elle fait, dispose les traits & les parties de maniere que, par le maintien & la contenance, on peut juger de ce qui l'occupe.

L'entendement, cette faculté dont l'action est si tranquille, ne sauroit agir, sans que les sens ne soient de la partie. Se recueille-t-il en lui-même, réfléchit-il sur ses idées? le regard devient fixe; les yeux sont ouverts, & ne considerent pas; l'oreille semble avoir perdu la faculté d'entendre; tous les sens sont dans le silence & l'inaction; leurs fonctions sont suspendues, comme s'ils craignoient de distraire l'ame de son opération.

Dans l'accès des passions, les muscles du front & de tout le visage, étendus sous la peau, se roidissent, ou se relâchent, suivant les mouvemens que les esprits & les nerfs leur impriment. Ces contractions des muscles forment des sillons ou linéamens à la peau, qui deviennent plus sensibles, à mesure que la contraction est plus répétée. Chaque passion a sa contraction particuliere pour s'exprimer. C'est sur cela que les Peintres ont formé leurs principes d'Iconologie, & ce que l'on appelle les *caracteres des passions*. Ces altérations ou changemens de maniere d'être des parties, causés par les émotions de l'ame, sont aussi ce que l'on appelle *caracteres physionomiques*, dont l'assemblage compose le tableau, l'image, des passions & des penchans; le miroir qui les présente à nos yeux.

Il est naturel à l'homme, comme à tous les animaux, d'avoir un penchant, que l'on appelle *inclination* dans les hommes, & *appétit* dans les animaux. Le colérique est porté à la colere, le sanguin à la joie, le phlegmatique à l'indolence & à la paresse.

Ces penchans sont, dans les hommes, les semences des passions qui les tyrannisent, ou des affections qui les occupent. Aussi voyons-nous que la plûpart des hommes se laissent emporter, comme les bêtes, à l'impétuosité de leurs appétits désordonnés. Mais les gens sages,

ges, dira-t-on, les gens réfléchis se laissent conduire à la raison: elle vient au secours des foiblesses de l'humanité; elle appaise les mouvemens du cœur, d'où partent les esprits, principe du mouvement de tous les ressorts: l'éducation corrige aussi les passions. Non, disons mieux, la raison & l'éducation en brident les fougues & les fureurs; mais elles n'en détruisent pas le germe. Il se développe malgré la Philosophie même. Pour les passions, c'est un frein au moyen duquel on les guide, comme l'on en met un, par précaution, au cheval le plus doux; parce qu'on en craint les emportemens. La raison vient toujours un peu tard. L'arbre a pris son pli; le fruit qu'il portera, conservera toujours quelque chose de sa figure naturelle, de la saveur de la seve, malgré l'ente que l'on y a insérée. La raison est comme Neptune, qui sort de dessous les vagues irritées de la mer, sujette à son empire: il appaise les vents déchainés, calme les flots; mais aux débris des vaisseaux, aux cordages rompus, ou dérangés, on voit les tristes effets de la tempête. On sait même très-bien que, malgré le calme, les flots s'irriteront au premier vent qui se déchaînera.

De même, aux traits, aux linéamens formés par l'impulsion des esprits, excités par les passions, on juge, & l'on peut assurer, que telle passion, telle vertu, ou tel vice ont dominé dans la personne qui en affiche l'étiquette; & que ces passions se réveilleront à la premiere occasion; que la personne sera ce qu'elle a été. *Simia semper simia.*

Nous aimons la liberté de nos passions, & le cœur est la partie de l'homme, qui souffre moins patiemment la servitude. On peut le gêner dans la libre manifestation de ses mouvemens: il n'en agit cependant pas moins dans l'intérieur. Mais, quoique le visage soit le tableau où les passions sont peintes avec leurs couleurs naturelles, & leur propre caractere, il doit cependant moins occuper les yeux que l'esprit du spectateur. Il donne plus de choses à penser qu'il n'en présente, surtout dans ceux qui ont appris à le composer.

Ce qui frappe d'abord, à l'aspect d'une personne que nous voyons pour la premiere fois, est la ressemblance, ou la différence des

traits

traits de son visage, avec les traits de quelqu'un qui nous est connu. On passe assez légerement sur cette observation, si l'objet n'a pas des traits de ressemblance assez marqués, pour nous rappeller l'idée de quelqu'un de notre connoissance. Sans réflexion décidée, on court tout de suite au jugement que les traits physionomiques de la personne nous dictent; & nous nous décidons, sans y trop penser, à avoir pour elle du penchant, ou de l'éloignement, ou enfin de l'indifférence; tant est naturelle en nous la science de la physionomie: comment ne seroit-elle pas d'un grand avantage à l'homme?

La Nature pouvoit-elle se dispenser de nous faire ce présent, en nous donnant cet instinct, cet appétit, qui nous porte sans cesse à nous approcher du bien, ou de tout ce qui peut contribuer à notre conservation, & à nous éloigner du mal, ou de tout ce qui peut concourir à la destruction de notre être? Nous sommes perpétuellement environnés de gens qui croyent avoir intérêt, ou de nous obliger, ou de nous nuire. Comment les distinguer? La Nature y a pourvû.

Entrons dans un cercle. Deux personnes à nous inconnues, y controversent sur quelque matiere. Ne sommes-nous pas tout à coup décidés sans réflexion, en faveur de l'une & au désavantage de l'autre? Est-ce l'effet de la sympathie, ou du talent que nous avons reçu de nature, pour connoître les hommes, & pénétrer leurs sentimens, à l'inspection de la physionomie? Peut-être est-ce l'effet de l'un & de l'autre. Toujours est-il vrai, que si nous n'avions ni yeux, pour considérer leurs personnes, ni oreilles, pour entendre leur voix, la sympathie n'auroit pas lieu dans cette occasion. C'est donc par la connoissance innée de la physionomie, que nous avons porté notre jugement sur les rapports avantageux ou nuisibles, que les personnes considérées ont été censées avoir avec la conservation de notre existence. De la comparaison que nous avons faite, ont résulté d'un côté le plaisir, la satisfaction à voir, à désirer l'objet pour lequel nous nous sentons du penchant; de l'autre le déplaisir & l'aversion contre celui pour lequel nous éprouvons de l'éloignement. Ceci, soit dit en passant

fans, n'expliqueroit-il pas ce prétendu *Je ne sais quoi*, d'où naissent, dit-on, l'amour, la sympathie, & leurs contraires?

Il semble que les caracteres des hommes, leur esprit, leur façon de penser, le bien & le mal qu'ils peuvent nous faire, soient écrits sur leurs visages. Les uns ont des traits si frappans de grandeur, de bonté, de clémence, de bienfaisance, d'humanité, que nous ne les considérons pas sans plaisir: nous ambitionnons d'être liés de société avec eux; nous leur voulons du bien; nous prendrions volontiers leurs intérêts comme s'ils nous étoient personnels, au point même de nous chagriner, s'ils venoient à n'avoir pas la victoire sur leurs adversaires.

Si au contraire nous appercevons dans la physionomie de quelqu'un des traits qui ne nous flattent pas, tout aussitôt la prévention contre lui s'empare de nous: nous en détournons les yeux, comme d'un objet capable de nous nuire; nous lui portons une haine secrette; & pour rien nous lui souhaiterions infortune & misere.

Les préjugés de la jeunesse influent beaucoup, dit-on, dans nos jugemens. Un Précepteur dur donne de l'aversion pour lui aux enfans, & pour tous ceux qui ont sa physionomie. Cela doit être; & ce n'est pas l'effet du simple préjugé, mais des connoissances naturelles que tous les hommes ont des physionomies. Les mêmes traits qui formoient celle du Précepteur dur & sévere, sont une étiquette qui annonce un caractere semblable dans tous ceux qui lui ressemblent. Ainsi les mêmes raisons qui donnoient de l'aversion pour le premier, doivent faire concevoir de l'éloignement pour les autres.

Ce présent de la Nature est d'un grand avantage; mais combien peu d'hommes savent en user à propos! Quelques uns ont été favorisés de ce don dans presque toute sa perfection (*). De leurs yeux partent des rayons de lumiere, qui éclairent les plus petits replis des

(*) Jules-César Scaliger avoit une admirable sagacité à connoître les mœurs & les inclinations des hommes, à leur air & aux traits de leurs visages. Il ne s'est pre-

des cœurs. Ils y voyent distinctement ce qui s'y passe : & sont, pour ainsi dire, comme la Divinité, scrutateurs des cœurs.

Triste avantage, dira peut-être quelqu'un. Ils y voyent plus de mal que de bien, plus de choses chagrinantes qu'agréables, plus de personnes à fuir qu'à rechercher. Trop clairvoyans sur les défauts des hommes, ils les détesteront : ils n'en trouveront presque aucun digne de leur attachement. Fi donc d'un tel avantage, qui réduiroit la société presqu'à rien. Il faut vivre en société, puisque l'homme est fait pour elle ; par conséquent prendre le tems comme il vient, & les hommes comme ils sont.

Voilà précisément à quoi se trouvent réduits ceux qui n'ont reçu de la Nature que la connoissance générale de la physionomie. C'est le raisonnement de ceux qui ignorent les avantages inséparables de cette connoissance, donnée dans sa perfection par la Nature, ou acquise par l'étude.

Mais, si on leur indiquoit les moyens de se précautionner contre les dangers qui les menacent au milieu des loups couverts de peaux d'agneaux, préféreroient-ils de croupir dans cette ignorance? Non, je ne le crois pas. A moins qu'ils ne soient brouillés avec le bon sens, ils conviendront que l'art de connoître les hommes à l'inspection de la physionomie, est mille fois préférable aux connoissances que l'on pourroit acquérir à ses propres dépens, par la funeste expérience, qui fait de celui qu'elle instruit, la victime de la fourberie & de la méchanceté.

J'arrive dans un pays. Je n'y connois personne : ou, si j'y connois quelqu'un, c'est seulement sur le rapport d'autrui. L'intérêt

 la

presque jamais trompé dans le jugement qu'il en portoit. Eloges des Savans tirés de l'Hist. de Mr. de Thon. Part. I.

Matthieu Tasurius de Soleto excelloit tellement dans ce genre de connoissance, qu'il étoit la terreur des uns, l'admiration, l'étonnement des autres. On a mille autres exemples de cette espèce.

la crainte, ou tout autre motif, peuvent très-bien avoir dicté les discours que l'on m'a tenus en faveur de l'un, ou au désavantage de l'autre. Qui de nous ne l'a pas éprouvé? Je dois donc m'en défier: par prudence, je suspendrai mon jugement. A qui aurai-je recours, pour discerner ceux qui méritent ma confiance & mon attachement?

Il y a des vertus & des vices rélatifs aux climats, aux loix, aux usages. Si j'en suis instruit, ils ne me surprendront pas; je saurai bien quel parti prendre à cet égard. Mais le vice proprement dit, craint la lumiere. C'est un Protée, qui prend tous les jours de nouvelles formes pour tromper. Cependant son empire n'est pas universel; partout on rencontre des hommes, & des hommes qui font honneur à l'humanité; des hommes nés pour la société, pour jouir de tous ses agrémens, & pour faire la félicité de ceux qu'une heureuse étoile a liés de commerce avec eux. Naturellement je suis porté à fuir le vicieux; parce qu'il travaille à me nuire: je cherche le vertueux; il fait le bonheur de ma vie. A quoi reconnoitrai-je l'un & l'autre? La Nature a donné à l'homme la langue, la voix, le geste, pour être les interprêtes de ses pensées. Mais, de peur qu'il n'en voulût changer la véritable destination, elle y a pourvû, en faisant parler en même tems son front, ses yeux, & les autres traits de son visage, pour démentir le geste, la langue & la voix, quand ils ne seroient pas fideles.

Mais, si je n'ai pas le bonheur d'être du petit nombre de ceux qui ont le coup d'œil assez fin, pour sentir le vrai au premier aspect de la physionomie; pour saisir à l'instant le fond du caractere de celui que je considere, quelle sera ma ressource? Faudra-t-il m'en rapporter aux discours avantageux, ou désavantageux que l'on m'aura tenus des personnes? Etablirai-je mon jugement sur l'impression qu'ont coutume de faire la laideur & la beauté? L'expérience a prouvé qu'il n'y a rien de si trompeur. La difformité du corps est de mauvais augure dans l'esprit de bien des personnes. On regarde ceux qui sont disgraciés de la Nature, comme des gens à éviter. A-t-on toujours raison? Il est fâcheux sans doute, d'être né sans certains agrémens, ou avec ces incommodités

tés contre lesquelles le préjugé indispose les esprits; mais il n'est pas moins fâcheux de voir les hommes être tous les jours les dupes de leurs préventions; & de leur voir attacher tant de prix au léger avantage d'une figure agréable.

Combien, en effet, voit-on de personnes, dont malgré l'irrégularité des traits, la physionomie a des appas; présente quelque chose qui attire, qui gagne les cœurs, quand on les considere attentivement? Combien d'autres au contraire avec des traits composés, & faits les uns pour les autres, ne causent qu'une admiration stérile, une extase, & souvent même une indifférence qui touche à l'aversion? Est-ce donc sur la forme de l'oeil que j'établirai mon jugement? Je sai bien que l'œil n'est reputé beau, qu'autant qu'il est bien fendu, bien ouvert, bien enchassé, & qu'il aura toutes les proportions requises. Mais eût-il tout cela, il ne sera pour moi qu'un bel œil de statue, s'il n'est animé; si les esprits qui s'y portent & y donnent la vie, n'y sont envoyés par l'effet d'une passion douce & bienfaisante. Le plus bel œil est affreux, quand la vengeance l'anime, quand la colere l'enflamme, quand le désespoir l'éteint, ou que la fourberie & l'envie de nuire en ternissent l'éclat, en chassent la douceur & en troublent le gracieux.

Apprenez donc à connoître les hommes, & ne vous laissez pas entraîner au torrent de ces petits esprits, de ces esprits frivoles, qui donnent tout aux apparences; & placent le mérite dans les agrémens les moins sensibles aux yeux du sage.

Celui qui sait penser, sans avoir été pleinement favorisé des connoissances naturelles de la physionomie, ne se laisse pas surprendre à un extérieur, qui, au premier coup d'œil, peut en imposer & faire illusion, soit en bien, soit en mal. Les rapports lui sont suspects. Il veut juger avec connoissance de cause. Le premier coup d'œil m'en a cependant toujours plus appris, que tous les rapports. J'ai souvent appellé de mon premier jugement à l'expérience: j'ai suivi de près les personnes, & bien des années; leur conduite a justifié la premiere im-

pression que leur physionomie avoit faite sur moi, quoique souvent contraire aux idées que l'on avoit voulu me donner de ces personnes. N'avons-nous pas ce talent? Si nous nous laissons prévenir, que ce soit en bien, & laissons à l'expérience le soin de nous guérir de cette prévention; ou apprenons l'art de connoître les hommes.

Autre embarras, autre incertitude. Pourquoi la physionomie de la même personne plaît-elle aux uns & déplaît-elle aux autres? S'il est vrai que ses traits annoncent son caractere, ils devroient faire la même impression sur tous les spectateurs. Point du tout: & voilà précisément ce qui prouve la nécessité d'apprendre à connoître les hommes par la physionomie. Le jugement que l'on porte, dépend de la maniere de les envisager, de les considérer. Celui-là porte plus d'attention, ou de meilleurs yeux, pour saisir d'abord les rapports des traits avec ce qu'ils annoncent. Celui-ci voit en étourdi, juge précipitamment & sans connoissance de cause. Un rien décide alors la façon de penser à l'avantage ou au désavantage. Le germe de la science physionomique se développe; mais, mal guidé, il prend une route contraire à celle que la Nature lui avoit destinée. Aussi reconnoissons-nous souvent notre erreur. La fréquentation des personnes nous fournit l'occasion de les examiner de plus près: nous découvrons dans cette figure qui nous avoit déplu & rebutés, des traits qui flattent notre imagination.

Il y a donc dans l'ame ce germe de l'art de connoître les hommes, dont on fait usage sans réflexion; connoissance, d'où naît le plaisir que nous trouvons à voir certains objets, & l'aversion qui nous éloigne de quelques personnes, après les avoir considérées. C'est par là que la Nature nous inspire des idées agréables, & nous dicte des jugemens utiles à notre conservation, avant même que nous y ayons réfléchi. Développons ce germe; ajoutons-y nos réflexions; dirigeons-les sur les regles de la science physionomique, que la Nature & l'expérience nous ont apprises. Nous y trouverons la route du bonheur, qu'une liaison aimable, une charmante société procure à tous ses membres.

Si

Si cette science nous apprend à voir l'homme avec ses infirmités, elle nous le montre aussi avec tous ses avantages; ceux-ci faits pour notre félicité; celles-là pour remplir nos jours d'amertumes. Sentons au moins une bonne fois combien il est intéressant pour nous de prendre les moyens de ne pas nous tromper dans le choix. A chaque pas notre aveuglement volontaire nous fait heurter contre des vases qui regorgent de cette amertume; pendant que nous pourrions marcher les yeux ouverts, voir, distinguer les objets capables de nous procurer du plaisir & de la satisfaction; seconder, faire valoir les talens de ces gens vertueux, écrasés sous le poids de la misère & de l'infortune; les mettre dans la jouissance des biens faits pour eux, & qui font l'appanage des méchans. On ne verroit pas vivre & mourir dans l'obscurité tels, qui auroient brillé dans les plus hautes places.

Les vices & les vertus, les goûts & les talens ont, dit-on, par eux-mêmes quelque chose de commun avec la constitution de nos corps. L'ame n'agit & n'est affectée par les objets extérieurs, que par la médiation des organes, dont la différence constitue celle des caractères. Il est donc possible de pénétrer les dispositions de l'esprit & du cœur des hommes par les signes extérieurs.

En effet il n'est aucune passion que les yeux ne décelent, *Taciti oculi mentis fatentur arcana*. En certaines personnes elle est si manifeste, que même les enfans, les domestiques les plus stupides remarquent & connoissent, les prémiers à l'œil du pere, les seconds à l'œil du maître, s'ils sont fachés, ou s'ils ne le sont pas. Pourquoi donc négliger le don de la Nature, cette secrette connoissance des choses, qui tendent à notre ruine, ou à notre conservation? La laisserions-nous ensevelie dans les abymes de notre ame, pendant qu'elle s'excite, se réveille, à l'abord des objets que les sens lui présentent? Ouvrons donc les yeux, & voyons en les avantages.

Quelle science plus belle, plus utile, plus nécessaire! & combien d'autres avantages n'a-t-elle pas? Celui qui en feroit parfaite-

ment instruit, auroit le secret de la sagesse & de la prudence humaine. Le secret de la sagesse, en apprenant à se connoître, ce que l'on peut, & ce que l'on doit faire pour son propre bonheur, & pour celui de ses semblables. Le secret de la prudence, en apprenant à connoître les autres, ce dont ils sont capables, ce qu'ils ont dessein d'entreprendre pour notre bien, ou à notre désavantage.

On ne se connoit jamais bien par soi-même. On se rebute aisément de la peine qu'il y a à se replier sur son propre fond. On n'aime gueres à passer en revûe ses propres défauts. L'amour propre nous les dissimule, dicte, corrompt nos jugemens à cet égard. Il nous faut un miroir, où nous puissions considérer notre ame, ses inclinations, ses affections, & en porter un jugement sincere & désintéressé, fondé sur les impressions agréables, ou fâcheuses, que les passions des autres font sur nous.

Considérons-nous donc dans ce miroir. Sentons tout le désagrément, toute la honte, qui nous reviendroit, si nous étions mis à découvert par les connoissances de celui que nous aurions eu dessein de tromper, en couvrant notre visage du masque de la fourberie. Les traits qui le composent, nous paroîtroient trop hideux, pour être tentés de les emprunter, & d'en parer notre visage. Ces grimaces seroient pour nous un miroir qui ne flatteroit pas. Les images qu'il nous présenteroit, nous feroient connoître ce qu'il y a de défectueux dans les grimaces semblables, que nous serions obligés de faire pour cacher notre façon de penser. Soit amour propre, soit intérêt de se conserver l'estime, la considération & l'amour de ses semblables, insensiblement on prendroit de l'aversion pour une passion si nuisible à celui qui la nourrit. On se montreroit tel que l'on est; on expulseroit de la société la défiance avec sa cause; & l'on y verroit renaître la douceur, la franchise dans les procédés, la sincérité dans le discours, qui en font tout l'agrément.

Hé! pourquoi la science physionomique n'est-elle pas cultivée, comme elle le mérite! L'homme auroit-il donc perdu cet instinct qui

qui le porte à s'aimer lui-même, à s'aimer dans soi-même, dans la compagne de son plaisir, dans ceux enfin qui peuvent contribuer à lui en procurer; parce qu'il y fait consister le bonheur de sa vie, auquel il aspire sans cesse!

On a vû que le moyen d'y parvenir est l'art de connoître les hommes. En effet, si cet art étoit plus cultivé, verroit-on tant de Capitons abuser par leurs flatteries de la confiance d'Auguste? tant de fourbes ambitieux écraser le mérite, & s'établir sur ses débris? tant de fripons réussir à l'abri du fard de la politique, décorée si mal à propos du beau nom de prudence? Verroit-on tant de bêtes féroces sous la figure humaine s'insinuer, s'introduire, se lier avec les honnêtes gens, pour les tromper, les rassasier, les inonder de chagrin, de fiel & d'amertumes, présentés dans une coupe dorée? Verroit-on tant d'hymens si mal assortis; tant de jeunes gens placés, où, pour leur bonheur & celui des autres, ils ne devroient pas être; faute de savoir, comme Socrate, comme Platon, comme Pythagore, discerner à leur physionomie, leurs qualités, leurs dispositions (*)? On relégueroit hors de la société, loin du doux commerce de la vie, ces hommes faits pour en être la peste & le malheur. L'agrément & le plaisir, qui n'en sont hélas! que trop souvent bannis, y reviendroient les couvrir de leurs fleurs. A cet air infecté des vapeurs empoisonnées de la fourberie, succéderoit cet air de candeur, de franchise, qui enivre de satisfaction, vrai

(*) Platon examinoit avec l'attention la plus scrupuleuse la physionomie des jeunes gens qui se présentoient pour écouter ses leçons. Si, sur l'inspection de leur figure, il ne les jugeoit pas capables de faire des progrès dans la Philosophie, il les exhortoit à prendre un autre parti; & les renvoyoit. Il avoit fait mettre pour avertissement sur la porte de son Ecole: qu'aucun de figure difforme, ou mal proportionné de ses membres n'eût à s'y présenter.

Suetone, dans la Vie de Tite, nous apprend qu'un Physionomiste fut chargé par Narcisse, affranchi de Claude, d'examiner les traits du visage de Britannicus; de déclarer ensuite ce dont il étoit capable; & s'il succéderoit à l'Empire. Le Physionomiste, ajoute Suetone, satisfit à toutes ces questions; & assura que Tite seroit Empereur, & non Britannicus.

vrai baume, seul capable de prolonger nos jours, de réaliser parmi nous la fable de l'âge d'or, & de nous faire sentir le bonheur de notre existence. Alors on seroit convaincu que l'homme n'est pas fait pour vivre seul; & l'on se dépouilleroit bientôt de cette prévention contre l'humanité, que des esprits possédés du démon de la mélancholie se sont fait un devoir d'inspirer.

L'homme a ses foiblesses; aucun n'en est exempt. *Beatus ille, qui minimis urgetur*, disoit le satyrique Horace. Mais il en est peu qui ne respectent le mérite & la vertu; & qui, dans le fond, ne leur soient plus attachés qu'au vice.

Si la science physionomique étoit à la mode, les traits du visage d'un homme vicieux, ou d'un homme chez qui la vertu est très équivoque, feroient sur les autres la même impression, que le foin attaché aux cornes d'un taureau furieux, pour avertir de s'en défier. Evités, fuis, honnis de tous, les solitudes leur seroient réservées. Elles ne priveroient pas la société de beaucoup de sujets des deux sexes, qui n'y respirent que l'ennui, & ne s'y nourrissent que d'un pain assaisonné de leurs larmes; au lieu des agrémens dont ils devroient jouir & qu'ils procureroient à leurs semblables. Ceux qui, sans être vicieux, mais par séduction, ou par un zele inconsidéré, s'éloigneroient de la société, en excitant notre pitié, nous prouveroient clairement qu'ils ignorent la maxime du sage, *væ soli*! ou que de propos délibéré ils veulent contredire les desseins de la Nature. Ils seroient des preuves sans replique, de l'abus que l'on peut faire de son jugement, & du peu de bon sens qu'il y a à se soustraire à la société.

De l'homme moral passons à l'homme physique. La science physionomique n'a pas de moindres avantages à cet égard.

Les passions étant des actions communes à l'ame & au corps, elles sont du ressort de la Médecine, dont l'objet est de connoître le physique de l'homme & de le guérir de ses infirmités. L'anatomie du corps humain peut contribuer beaucoup à fonder, à étendre les con-

noissan-

noissances physionomiques. Elle indique l'origine des nerfs, la liaison & le rapport des muscles, l'action des uns sur les autres; ce qui les met en mouvement, les moyens progressifs de ces mouvemens, & leurs effets. Elle est, pour ainsi dire, la synthese de la science physionomique. Celle-ci, en observant, en considérant, en raisonnant sur les effets de ces mouvemens, découvre l'union intime du moral avec le physique; remonte à la cause de ces mouvemens, juge des uns par les autres, & devient l'analyse de la Médecine & de l'Anatomie.

Tous les Médecins savent que le tempérament détermine la qualité des maladies; & qu'il en est comme la source. C'est la part, échue à chacun, de ce qui étoit renfermé dans la boëte de Pandore. La physionomie indique le tempérament, l'habitude des parties qui constituent la machine humaine. Elle montre leur force & leurs actions habituelles sur l'esprit; parce qu'ils agissent mutuellement l'un sur l'autre, & se dominent réciproquement. Le corps s'altere-t-il? l'ame souffre. S'il est rempli d'humeurs, & que la maladie l'affaisse, l'ame s'appesantit; la langueur s'en empare. Réciproquement, lorsque l'ame est agitée, le corps s'agite aussi, & subit une altération très-sensible.

Une des choses essentielles que doit faire un Médecin jaloux d'exercer sa profession avec honneur & succès, est de considérer attentivement la constitution habituelle, & surtout actuelle, du visage de son malade. Hippocrate, Aristote, Avicenne, & tous les grands Médecins en ont fait un précepte de leur art. Lorsque vous entrez chez un malade, dit Actuarius, (lib. 2. cap. 2. & 3.) avant tout, considérez sa maniere d'être couché, sa respiration; voyez, observez les traits de son visage; si ses yeux sont creusés, ses tempes enfoncées; s'il a le nez retiré, ou devenu plus pointu; s'il a l'œil net, ou larmoyant, le regard fixe, ou inquiet, le front sec & aride &c. voyez la couleur de sa peau, de son teint &c. Toutes ces choses sont des indices de ce qui se passe au dedans.

 Mais

Mais une connoiſſance pour le moins auſſi eſſentielle, & auſſi néceſſaire à un Médecin, eſt de ſavoir deviner par les ſignes extérieurs les cauſes morales des maladies.

Point de maladies, ſi l'on en excepte les accidentelles, qui n'ayent pour cauſe quelque paſſion de l'ame. Le bon ou le mauvais uſage des paſſions, en faiſant le bonheur ou le malheur de la vie, eſt auſſi le principe de la maladie & de la ſanté. Les paſſions ſont-elles bien réglées? les émotions de l'ame ſeront modérées, ainſi que le mouvement des reſſorts. Il en réſulte la vertu & la ſanté. Sont-elles portées à l'excès? elles deviennent la ſource des troubles, des tempêtes de l'eſprit, la cauſe des déſordres & de l'altération des organes du corps. Voilà le vice moral & le vice phyſique. Un Médecin appellé pour traiter un malade qui ne peut ou ne veut pas déclarer la cauſe morale de ſon infirmité, pourra-t-il ordonner les remedes convenables, s'il ignore cette cauſe? Comment Eraſiſtrate, appellé pour guérir Antiochus de ſa maladie de langueur, eût-il réuſſi, ſi ſon habileté dans la ſcience phyſionomique ne lui eût pas découvert que ce Prince brûloit d'une paſſion amoureuſe pour Stratonice?

Tout Médecin doit ſavoir que la triſteſſe, par exemple, eſt réveuſe, peſante, ſtupide; qu'elle épaiſſit le ſang, deſſeche l'humide radical & les os; qu'elle éteint les eſprits, détourne les ſens de leurs fonctions, remplit les organes & les vaiſſeaux d'humeurs noires & corrompues, qui leur ſont ce que la boue eſt aux canaux des fontaines. Quel en ſera le ſigne extérieur? Tout le corps ſera languiſſant, le jeu des reſſorts rallenti. Le cœur, principe du feu, qui porte la vie dans toutes les parties, ſe reſſerrant & ne laiſſant échapper de ſes eſprits, que ce qu'il ne peut retenir, les membres deſtitués de ce feu qui les anime, ne tranſpireront qu'une ſueur froide & glacée, fournie par les vapeurs noires, dont la couleur répandue ſur la peau, en ternira la blancheur & l'éclat. Les yeux ſembleront fuir le jour, & ne préſenteront qu'un mélange de lumiere & de ténebres, ſemblables à ces nuages ſombres & obſcurs, au travers deſquels les rayons du ſoleil ne ſau-

sauroient pénétrer. La peau, privée de cette douce humidité qui en fait la souplesse, se dessèchera; les muscles en se retirant, en se resserrant, y creuseront ces sillons, tombeau de la joie & du plaisir; & l'annonce du souci; qui font dire à la vûe d'un homme triste: cet homme a quelque chose qui le mine: il a le cœur serré. *Felix, qui potuit rerum cognoscere causas.*

On conçoit combien il est important de se mettre au fait de la science physionomique, tant pour conserver la santé des hommes, ou la rétablir, que pour se précautionner contre les pieges tendus par la fourberie, & si fréquens dans le commerce du monde.

Mais un Peintre, un Sculpteur, en tireront le plus grand avantage, pour se guider dans l'exécution des chefs-d'œuvre de leurs arts. Les connoissances physionomiques pourroient même suppléer à la présence d'une personne dont il s'agiroit de faire le portrait, celui d'un Héros, par exemple, d'un Savant, d'un homme célebre dans l'antiquité, dont les Historiens nous auroient conservé la description de sa stature, de son caractere, & le récit de ses actions. Les Poëtes & les Historiens avoient une attention toute particuliere de ne point faire de portraits des mœurs des hommes, sans assigner la forme & la figure du corps des personnes dont ils parloient. Voyez Homere, lorsqu'il compare les mœurs de Thersite avec la figure de son corps. Voyez dans quel détail il entre, quand il parle d'Achille & des autres Héros. Antenor, dit-il, avoit une taille haute & menue: il étoit fin & rusé, savant dans la science physionomique. Après avoir considéré les traits de Ménélas & ceux d'Ulysse, il jugea combien ils différoient de sentimens, d'inclinations. Il devina que Ménélas parloit peu; mais disoit bien: qu'Ulysse étoit un orateur diffus; & compara l'affluence de ses paroles aux floccons de neige qui tombent pendant l'hyver.

Darès le Phrygien a la même attention qu'Homere, dans la longue énumération de ses Héros. Enée, dit-il, étoit roux, avoit les

épaules larges, les yeux noirs & riants: il étoit éloquent, affable, prudent dans le conseil. Achille étoit large de poitrine, beau de visage, ayant des membres nerveux, des cheveux durs & bien fournis, une physionomie gaie & prévenante: il étoit brave, généreux, libéral, clément. Voyez Suetone & tant d'autres.

Jaloux sans doute de passer à la postérité tel qu'il étoit, Alexandre le grand défendit qu'aucun Peintre ou Sculpteur, autres qu'Apelles & Praxitele ne s'avisassent de faire son portrait. Il craignoit apparemment que d'autres n'exprimassent pas bien les traits, qui chez lui caractérisent le Héros; que des portraits peu ressemblans à sa personne, ne fissent naître dans l'esprit des spectateurs, des idées qui répondroient peu à sa réputation. L'Histoire nous apprend qu'un Peintre de même nom que ce conquérant de l'Asie, réussissoit si parfaitement à saisir & à exprimer la ressemblance des personnes dont il faisoit les portraits, que les physionomistes y lisoient le vrai fond du caractere de ces personnes.

J'ai vû un exemple semblable à Paris. Un étranger qui se nommoit Kubisse & se disoit sujet du Héros Monarque, qui gouverne cet Etat-ci avec tant de sagesse & de gloire, passant dans une salle chez Mr. de Langes, fut tellement frappé à la vûe d'un portrait qui y étoit avec plusieurs autres, qu'il oublia de nous suivre; il s'arrêta à considérer ce tableau. Environ un quart d'heure après, ne voyant pas venir Mr. Kubisse, nous fumes à lui, & le trouvâmes les yeux encore fixés sur le portrait. Que pensez-vous de ce portrait, lui dit Mr. de Langes? n'est-ce pas celui d'une belle femme? Oui, répondit Mr. Kubisse. Mais, si ce portrait est bien ressemblant, la personne qu'il représente a l'ame la plus noire: ce doit être une méchante diablesse. C'étoit le portrait de la Brinvilliers, célebre empoisonneuse, presqu'aussi connue par sa beauté que par ses forfaits, qui l'ont conduite sur le bûcher.

„Il n'est pas plus difficile, dit l'Auteur de l'Homme machine, „de deviner la qualité de l'esprit, par la figure ou la forme des traits, „lorsqu'ils sont marqués à un certain point, qu'il ne l'est à un bon Mé-

„decin

„decin de connoître un mal, accompagné de tous ses symptomes évi-
„dens. Examinez les portraits de Locke, de Steele, de Boerhaave,
„de Montesquieu; vous ne serez point surpris de leur trouver des
„physionomies fortes, des traits d'aigle. Parcourez-en une infinité
„d'autres, vous distinguerez toujours le beau du grand génie, & mê-
„me souvent l'honnête homme du fripon. On a remarqué, par
„exemple, qu'un Poëte célebre réunit dans son portrait l'air d'un filou,
„avec tout le feu de Prométhée."

Je ne finirois pas, si je voulois entrer dans le détail des avantages attachés à l'art de connoître les hommes par les signes extérieurs de la physionomie. Du peu que j'en ai rapporté, il sera aisé de conclure que cette science comprend ce que la politique, la morale, & la médecine ont de plus excellent. Un traité complet de cet art pourroit être regardé comme le plus beau & le plus utile à tous égards. Loin de taxer cette science, de science nuisible, ses avantages prouvés par l'expérience détermineroient à y mettre pour épigraphe: *Omne tulit punctum*.

En effet, la plûpart des sciences nous tirent hors de nous-mêmes & de la société, pour fixer notre attention sur des objets ou trop éloignés de nous, ou qui nous intéressent peu pour le bien de la vie. Quand nous saurions prédire à point nommé la conjonction des Planetes, déterminer leurs révolutions, le moment précis de l'apparition, & la durée du cours, ainsi que la route d'une Comete, en serions-nous plus en état de régler les saisons, d'avoir du beau tems ou de la pluie, suivant nos besoins? d'empêcher que la gelée, une chaleur excessive, ou la grêle, ne désolent nos campagnes, & n'anéantissent en un moment tout l'espoir du cultivateur? Que l'Algebre nous apprenne à calculer jusqu'au nombre des étoiles & des grains de sable qui se trouvent dans le globe terrestre: que la Géométrie transcendante nous donne la solution des problêmes les plus compliqués & les plus difficiles à résoudre; j'admirerai la perspicacité, la subtilité, l'étendue de l'esprit & du génie, la patience même infatigable de ces hommes, qui

se

se sont distingués dans ces genres d'étude, & dont les découvertes montrent l'excellence de la nature humaine. Mais l'objet le plus intéressant pour nous est la conservation de notre existence, & cette façon d'être dans la société, de laquelle dépend notre bonheur. La recherche des choses même les plus nécessaires à la vie, semble nous tenir moins à cœur: l'homme raisonnable se contente de si peu! Savoir découvrir les inclinations, les desseins, les mœurs d'autrui, avouons que c'est le flambeau, le fil, qu'il nous faudroit pour nous conduire dans le dédale de la vie civile, pour éviter mille fautes, nous précautionner contre tant de dangers auxquels la politique, la dissimulation & la fourberie nous exposent tous les jours. Il ne faut pas d'argumens pour persuader une chose si claire: & si la science physionomique peut exécuter tout ce qu'elle promet, il n'y a guere de moment dans la vie, où elle ne soit nécessaire.

Le choix raisonnable d'un époux ou d'une épouse; quel point essentiel! En faudroit-il d'autres, pour justifier les avantages inséparables de l'art de connoître les hommes? L'institution des enfans; le choix des domestiques. Les anciens n'admettoient point d'esclaves dans leurs maisons, sans avoir bien considéré leur figure, leur maintien. On lisoit dans leurs yeux, s'ils étoient fideles, capables d'attachement; dans leurs gestes, s'ils étoient propres aux fonctions auxquelles on les destinoit.

Autre choix, non moins important; celui des amis, celui des compagnies avec lesquelles on se propose de faire des liaisons. Sans le secours de cet art, comment pouvoir mettre sûrement en exécution ce conseil du sage? *Ne vous liez pas avec un homme colere; ni avec un envieux. Evitez de vous trouver dans la compagnie des méchans.*

La connoissance des hommes est bien trompeuse, si elle se regle sur la réputation; périlleuse, si on attend à l'acquérir par l'expérience. La science physionomique est donc presque la seule qui puisse être la ressource contre ceux qui sous les dehors de l'amitié, ou d'une vertu pure

pure cachent les sentimens les plus bas, les plus rampans, les desseins les plus dangereux, & les plus contraires à notre bonheur.

Ouvrez nos loix & nos codes, monumens éternels de notre honte, vous y verrez combien les hommes sont vicieux; combien ils sont à craindre, si l'on s'en rapporte aux visages empruntés. Il est tant de ces tours étudiés, que la méchanceté la plus noire enfante, & habille ensuite des dehors de la justice & de la Religion. Il est de ces coups de poignards enfoncés avec adresse & douceur. On a sans-cesse les oreilles fatiguées par ces discours empoisonnés, où la franchise, le zele pour le bien public, ou particulier, l'amour de la vérité semblent se le disputer. Tirez le voile; vous n'y trouverez que méchanceté & fourberie.

On voit des hommes ayant les procédés extérieurs les plus honnêtes, avoir pour eux la voix publique; tandis que, dignes du plus souverain mépris, ils inspireroient une espece d'horreur, s'ils étoient dévoilés. Il est important pour la société que les méchans soient connus, disoit un ancien: *interest Reipublicæ cognosci malos.* Peut-on mieux les démasquer que par la science physionomique? Elle ne sauroit être nuisible qu'à ceux qui en sont l'objet. Eux seuls auroient sujet de s'en plaindre. Est-on fourbe, méchant? On craint d'être connu pour ce que l'on est; & de ne recueillir de son étalage trompeur, que le mépris & l'indignation, dignes fruits de la fourberie.



SUR

LES PHYSIONOMIES.

SECOND DISCOURS (*).

PAR MR. DE CATT.

La question que nous discutons, n'eſt rien moins qu'indifférente. Si la phyſionomie des hommes nous développe leurs plus ſecretes inclinations, les émotions habituelles de leur ame, les effets qui en réſultent, & par conſéquent leurs vertus & leurs vices; (tiré de D. P. p. 8.) (**) s'il n'y a que des avantages à connoître l'intérieur des hommes par les ſignes extérieurs, & à juger de leurs qualités bonnes ou mauvaiſes, à la ſeule inſpection de leur phyſionomie; tout le monde & ſurtout les Chefs des Nations doivent s'attacher à l'étude des phyſionomies, & ſuivre dans les affaires les plus importantes le flambeau qu'allume la ſcience phyſionomique.

Au contraire, ſi la phyſionomie des hommes ne nous montre que quelques-unes de leurs qualités; ſi les inconvénients auxquels on s'expoſe en jugeant de l'intérieur par les ſignes extérieurs, ſurpaſſent les avantages; il faut éviter une étude ſi dangereuſe, ſe défier de la ſcience phyſionomique, & fermer les oreilles à ſes inſinuations.

Si de ces deux propoſitions contradictoires on embraſſe la fauſſe, on fait tort à ceux avec qui l'on a affaire, ſi l'on eſt ſimple particulier; à toute la nation, ſi l'on eſt conſtitué en dignité; & toujours on ſe fera tort à ſoi-même, en ſorte que, ſi les avantages ſont problêma-

(*) Voyez le premier, Tome XXIV. p. 494. & ſuiv.

(**) Ces citations ſe rapportent à l'Edition *in* 8. du Diſcours de Dom Pernety.

blématiques, ou s'ils sont compensés par les inconvénients, la prudence exige qu'on se refuse aux connoissances physionomiques.

J'ai tâché de montrer que l'art de connoître les hommes par la physionomie est fort incertain, & que les avantages en sont au moins balancés par les inconvénients. Un Savant dont j'ai l'honneur d'être confrere est d'un avis contraire; achevons d'instruire le procès afin que le public puisse juger.

Dans mon Discours précédent, j'étois si plein de l'idée qu'on attache communément au mot *physionomie*, que je n'ai pas songé à le définir. Pour suppléer à cette omission, je déclare que j'entens par *Physionomie* ce qu'on entend communément, *tous les traits du visage & leur combinaison.* L'usage en exclut la taille, les autres parties du corps & le maintien, soit en mouvement soit en repos, que quelques-uns y font entrer. (D. P. pag. 8.)

Les physionomies different par la différence de chaque trait & par celle de l'*ensemble;* & les yeux saisissent ces différences, comme ils saisissent les signes extérieurs qui différencient tous les autres objets.

Je conviens (Pern. pag. 2 & 3.) qu'à cause de cette ressemblance, on pourroit donner le nom de *physionomie* à la forme, à la figure, à la couleur, aux traits; *en un mot à tous les traits caractéristiques par lesquels nous jugeons que deux choses ne sont pas la même, mais que chacune est telle individuellement.*

Cependant je n'oserois mettre au nombre des connoissances physionomiques l'astronomie, la météorologie, la minéralogie, la botanique, l'histoire naturelle des animaux, (D. P. pag. 3. 4. 5. 6.) la médecine, la politique même, en un mot, toutes les connoissances qu'on acquiert par les yeux. (D. P. pag. 7.) Comme c'est par les yeux qu'on distingue les physionomies, il est vrai que c'est par les yeux qu'on apperçoit la rougeur de Mars, la blancheur de Jupiter, l'éclat de Vénus, la couleur plombée de Saturne, la couleur d'or qui brille dans le pinchsbeck, la mine pâle & languissante d'un malade, les

loix écrites d'une nation & les mœurs qu'elle a, d'où l'on conjecture la constitution. Il est même vrai que le mot *physionomie*, qu'on devroit écrire *physiognomie*, signifiant connoissance de la *nature* ou des *naturels*, par son étymologie embrasse tous les objets dont on peut connoître la nature, de quelque maniere que ce soit.

Cependant je n'ai jamais oui dire, qu'on distingue les planetes à leur physionomie, que le pinschbeck a la physionomie de l'or, qu'un homme a la physionomie malade, & qu'on juge de la constitution d'un Etat par sa physionomie. Ces expressions sont contraires à l'usage, auquel je me suis conformé dans ma piece: parler de la physionomie dans un sens si étendu, ce seroit sortir des bornes que l'usage m'a prescrites; & examiner une question fort différente de celle que je me suis proposée.

L'on n'auroit pas seulement attaqué mon sentiment, quand même on auroit démonstrativement prouvé que les connoissances physionomiques de cette espece sont avantageuses.

Pour fixer l'état précis de la question, je l'ai divisée en deux:

Premiere Question: *Seroit-il avantageux pour le genre humain que chaque individu portât écrits sur son front, ses goûts, ses penchants, ses dispositions, ses talents, ses vices, ses vertus, en un mot tout son caractere; & que chacun pût lire clairement ce caractere sur le front des autres?*

Seconde Question: *Dans la supposition que la physionomie ne découvre tout au plus qu'une partie de l'intérieur, & que la plûpart des hommes n'y lisent qu'imparfaitement; est-il avantageux au genre humain que l'on cultive les connoissances physionomiques, & qu'on se fie à ce qu'elles nous insinuent?*

Ces questions ne méritent d'être discutées qu'autant qu'elles sont utiles; & certainement toute question fondée sur des chimeres est inutile. Il faut donc fixer les faits avant d'aller plus avant.

Premier

Premier Fait: Les hommes ne se laissent pas toujours entraîner à la passion qui les agite: même ils n'agissent pas toujours suivant leur caractere. On ne peut rapporter comme vraie l'histoire de Socrate & de Zopyre, (voyez D. P. pag. 16. au milieu) sans en convenir, & sans avouer de plus que la conduite ordinaire & habituelle d'un homme peut être opposée à celle qu'il tiendroit s'il s'abandonnoit à son caractere; ou qu'un homme peut se former par art un caractere opposé à celui qu'il a reçu de la Nature.

Second Fait: Presque tous les hommes, tels qu'ils sont à présent, se trompent en jugeant des physionomies. On avoue (D. P. pag. 32. à la fin) que peu d'hommes savent user à propos de ces connoissances; que (pag. 11. au comm.) le masque de la dissimulation, (pag. 18. prem. lig.) quelquefois les traits naturels en imposent aux hommes ordinaires, c. à d. au plus grand nombre, puisqu'il n'y a d'excepté que le petit nombre (p. 35. au com.) de ceux qui ont le coup d'œil assez fin pour sentir le vrai au premier aspect de la physionomie. Je crois donc pouvoir regarder comme avoués ces deux faits que j'avois supposés dans mon premier Discours, & que j'expose ici, parce qu'il semble que ceux qui sont d'un sentiment contraire au mien, n'y font pas assez d'attention. Ces deux faits nous ramenent à la seconde question, à laquelle ils servent de réponse.

Car, puisque le plus grand nombre se trompe en jugeant des physionomies; puisque l'erreur entraîne des suites fâcheuses; il est ordinairement dangereux de juger les hommes par la physionomie.

De plus, puisque les hommes peuvent agir d'une maniere opposée à celle que promettent leur caractere, & même les passions qu'ils ressentent actuellement, les connoissances physionomiques nous montrent tout au plus ce qu'un homme feroit s'il suivoit son caractere ou sa passion: il faut avoir recours à d'autres moyens pour savoir ce qu'il fera: donc les connoissances physionomiques ne sont pas fort utiles.

J'ai ajoûté qu'il est très désavantageux de perdre son tems à chercher ce qu'on ne peut pas trouver, & qu'on ne peut pas trouver ce qu'on cherche dans la physionomie.

1°. Parce qu'elle ne montre qu'une partie du caractère d'un homme, & non le caractere entier.

2°. Parce que, quand même tout le caractere seroit écrit sur une physionomie, personne ne pourroit être sûr de l'avoir bien lû, puisqu'on ne sauroit donner une notion claire & précise de ce qui distingue une physionomie d'une autre, & qu'on en juge sans aucune regle, par une espece d'instinct qui est fort sujet à l'erreur.

3°. Parce que la connoissance des physionomies est pernicieuse pour ceux qui étant plus frappés du mal que du bien, sont portés à rebuter un homme qui a plusieurs excellentes qualités, parce qu'il en a quelques-unes de mauvaises; & les hommes de cette espece ne sont pas le plus petit nombre.

J'ajoûte que, quand même toutes les raisons précédentes seroient aussi fausses qu'elles sont vraies, il ne s'ensuivroit point que les connoissances physionomiques fussent exemptes de tout inconvénient, si elles étoient communes.

Examinons à présent les réponses que le Savant qui n'est pas de mon sentiment, oppose à ces raisons.

Pour prévenir les équivoques, j'avoue que les traits de notre visage sont altérés, non seulement par les passions violentes, telles que la colere, la peur avec ses especes qui sont la terreur, l'effroi, l'horreur; mais aussi par des passions plus douces & plus durables: (*) de ce nombre sont la joie, la satisfaction intérieure, la jalousie, l'envie, la malice, la dérision, le mépris, les soucis, l'attention soutenue, la tristesse, la bienveillance, l'amitié, la pitié, l'amour, la honte, la timidité, qui au reste paroit plus dans la contenance que dans la physionomie. Mr. l'Abbé Pernety explique très-bien (pag. 27. 28.) le méchanisme par lequel la nature peint ces passions sur l'extérieur de l'homme qui les éprouve. Ces passions, à la réserve des six dernieres, quand elles agi-

(*) Voyez D. P. pag. 27. à la fin & 28. au com.

agitent ſouvent un homme, laiſſent ſur ſon viſage des traces reconnoiſſables; les traits naturels changent peu à peu, & contractent les plis que les paſſions leur font ſouvent prendre. Mon ſavant Confrere ne s'explique pas d'une maniere préciſe à ce ſujet. Je conjecture que ſon ſentiment eſt conforme au mien puiſqu'il aſſure (pag. 29. lig. penult.) que c'eſt aux traits, aux linéaments formés par l'impulſion des eſprits excités par les paſſions, qu'on juge & qu'on peut aſſurer que telle paſſion, telle vertu, ou tel vice domine dans la perſonne qui en affiche l'étiquette. Auſſi les caracteres que les peintres expriment bien, (voyez D. P. pag. 28. au milieu) ſont ceux qui réſultent des paſſions fortes ou douces, qui de mon aveu laiſſent des traces ſenſibles. Pour les autres paſſions, les peintres peuvent exprimer que la perſonne les reſſent actuellement, non qu'elle y eſt habituellement expoſée. On peut voir l'amour peint dans les yeux de Renaud aux pieds d'Armide, ou d'Hercule à côté d'Iole; mais je n'ai jamais pû diſtinguer à la phyſionomie ſi un homme avoit ou n'avoit pas le cœur très-ſenſible. (*)

On peut exprimer l'amitié la plus tendre dans les traits de la fille qui allaite ſon pere, & la reconnoiſſance la plus vive dans ceux du pere, la compaſſion dans le viſage du Samaritain de la parabole, la honte dans la femme adultere; mais je ne vois pas comment on peut exprimer l'habitude des paſſions.

L'yvrognerie laiſſe des marques ſenſibles; l'amour de la boiſſon n'en laiſſe pas dès qu'il n'eſt pas ſouvent réduit en acte.

L'uſage immodéré des plaiſirs de l'amour en laiſſe quelquefois, mais pas toujours.

La preuve de preſque toutes ces remarques, ſi elles en ont beſoin, ſe trouve dans l'excellent détail que Mr. de Buffon a donné des caracteres extérieurs des paſſions. Il eſt facile de diſtinguer les ſignes des paſſions qui laiſſent des traces, de ceux qui n'en laiſſent pas. Je ne vois pas comment on peut aux traits formés par l'impulſion des eſprits

(*) Je parle de l'*amour*, non de la *laſciveté*.

esprits excités par les passions, juger que dans le cœur d'un homme domine une passion, une vertu, un vice, qui ou ne laisse aucune trace durable, ou n'a pas altéré les traits naturels pour laisser une trace sensible. On voit que je donne à la physionomie qui indique quelque chose de moral, des bornes bien étroites, & que j'en exclus tous les traits naturels, la bouche grande ou petite, le front large ou étroit &c.

J'accorde à Mr. Pernety (voyez pag. 31. à la fin) qu'il y a des physionomies nobles & basses, qu'il y en a d'heureuses & belles, & de mauvaises & funestes, de spirituelles & de stupides. J'ajoûte que les bossus ont une physionomie particuliere, que les Mores, les Chinois, les Lappons ont des physionomies nationales qui sont faciles à reconnoître; & si l'on veut, qu'on peut en général lire sur le visage d'un inconnu de quelle nation il est.

Il s'agit de savoir si ces physionomies indiquent sûrement le caractere de la personne. La physionomie nationale ne l'indique point, puisque dans chaque nation on trouve toutes sortes de caracteres, quoique modifiés par le climat, par les coûtumes, par le gouvernement & par la Religion. La physionomie particuliere ne tient pas toujours ce qu'elle promet. Agésilas & Tamerlan n'avoient pas à beaucoup près une physionomie conforme à leur courage; (*ignoti faciem ejus quum intuerentur*, *contemnebant*, dit Corn. Nepos d'Agésilas) (*). Il s'en faut bien, à ce qu'on assure, que l'esprit & le génie du célebre D. Hume paroisse dans ses traits & dans ses yeux.

Il y a des méchans & des fourbes dont la physionomie promet la bonté & la bonne foi.

Mr. l'Abbé P. convient (p. 36. à la fin) que l'extérieur peut en imposer, & faire illusion soit en bien soit en mal; que souvent sous un beau dehors on cache un caractere pervers; (pag. 18. au com.) que bien des hommes ressemblent à des pillules dorées, qui renferment un poison mortel (pag. 19. au milieu). Il est vrai qu'il attribue

ces

(*) Voyez aussi le passage de Cicer. pag. 18. au com.

ces faux jugemens au premier coup d'œil, & à ce qu'on n'a pas analysé ces pillules, à ce qu'on n'a pas apporté dans cet examen assez d'attention ou d'assez bons yeux. Ainsi le germe de la physionomie mal guidé, prend une route contraire à celle que la Nature lui avoit destinée, & en fréquentant les personnes nous découvrons dans telle figure qui nous avoit déplu, nous avoit rebutés, des traits qui flattent notre imagination.

Je pourrois répondre qu'ayant appris à connoître la personne par ses actions, l'expérience rectifie le jugement, & que l'imagination prête à la physionomie les traits qu'elle croit assortis au caractere. C'est l'imagination, *non la nature*, qui *présente* aux yeux d'un spectateur prévenu des *traits d'un brave homme*, d'un *homme fait pour la société*, dans un visage qui ne flatte pas (pag. 18. l. 1.) l'imagination prévenue: on ne disconviendra point qu'Agésilas n'ait la mine basse; mais elle trouvera qu'en l'examinant bien, on voit dans ses yeux les traces du courage & de la grandeur, que cependant ceux qui ne le connoissent pas, n'y trouvent point.

Je n'insiste point sur cette raison: sans l'abandonner, j'en appelle à un fait & à la raison.

Le fait est que la Philosophie de Socrate avoit bien déraciné ses mauvaises inclinations; mais elle n'avoit pas détruit la mauvaise physionomie qui les annonçoit. Cette physionomie n'indiquoit donc pas le caractere de Socrate, mais un caractere opposé. Qu'importe que Socrate eût changé son caractere par art! Ou les vertus produisent *l'agitation des esprits d'où résulte celle des humeurs* & les mouvemens des parties, ou elles ne la produisent pas. Si les vertus ne produisent point cette agitation, elles ne peuvent pas être peintes sur la physionomie. Si les vertus agitent les humeurs, à la longue la physionomie de Socrate devoit être changée. Zopyre entre autres le jugea stupide & lourd. (Cicer. de fato, *stupidum & bardum.*) Est-ce à la Philosophie qu'il dut son esprit fin & délié? Est-ce par art que Socrate a changé son caractere à cet égard?

La raiſon dit par la bouche de Mr. de Buffon qu'*on ne doit pas juger du bon ou du mauvais naturel d'une perſonne par les traits de ſon viſage; car ces traits n'ont aucun rapport avec la nature de l'ame, aucune analogie ſur laquelle on puiſſe fonder des conjectures raiſonnables.* (Buffon Hiſt. nat. de l'homme, âge viril, vers le milieu.) Si j'avois lu ce paſſage plutôt, je l'aurois cité dans mon premier Diſcours.

Je conviens qu'il y a des hommes extraordinairement portés par leur tempérament à la colere, à l'amour, à la gaieté, à la triſteſſe; *que le colérique eſt porté à la colere, le ſanguin à la joie, le mélancolique à la crainte, le phlegmatique à l'indolence & à la pareſſe;* (D.P. p. 28. & penult.) & que l'extérieur annonce ces tempéramens; mais je doute qu'en général *les vices* & *les vertus*, les *goûts* & les talens, aient *par eux-mêmes quelque choſe de commun avec la conſtitution de nos corps.* (D. P. pag. 38. à la fin & 39. au com.) Sans doute, *l'ame n'agit & n'eſt affectée par les objets extérieurs, que par la médiation des organes:* (D. P. pag. 39. au com.) Un manchot ne ſauroit jouer du violon, ni un aveugle connoître la beauté d'un tableau. Mais il n'eſt pas également certain que *la différence* des organes conſtitue celle du caractere (id. ibid.); celui qui a la vue excellente & celui qui l'a baſſe & foible, celui qui a l'oreille fine & celui qui l'a peſante, different-ils de caractere à cauſe de ces différences dans les organes? Et ſi la choſe étoit auſſi vraie qu'elle eſt fauſſe, ne ſeroit-ce pas avec un peu de précipitation que l'on concluroit: *il eſt donc poſſible de pénétrer les diſpoſitions de l'eſprit & du cœur des hommes par les ſignes extérieurs?* (id. ibid.)

Quoique les organes ſoient indiſpenſables à l'ame des hommes, elle eſt ici conſidérée ſous deux aſpects, & doit être conſidérée de cette maniere; car elle reçoit paſſivement les impreſſions des objets extérieurs, & elle diſpoſe d'eux activement.

L'ame, entant qu'elle eſt paſſive, peut ſeulement recevoir les impreſſions que les organes peuvent lui tranſmettre; & ſi elle a des facultés qu'elle ne peut développer ſans avoir reçu les impreſſions que les

les organes ne lui ont pas transmises, elle ne développera jamais ces facultés.

Il est très-possible que l'ame de Saunderson eût la disposition de juger de la beauté d'un tableau avec le goût du plus fin connoisseur. Saunderson devint aveugle dans l'enfance; & cette disposition, je l'avoue, est restée simple disposition. Mais toute différence dans les organes n'est pas une privation. Dans les organes qui produisent des sensations fort différentes, il y a des différences moins considérables qui dépendent de la constitution intérieure de l'organe, & nous ne voyons que l'extérieur.

Il y a aussi des différences dans la conformation du cerveau, & il n'est que trop prouvé qu'une certaine disposition du cerveau influe beaucoup sur l'attention & sur le génie: (voyez par exemple Tissot de l'Onanisme, & le Livre intitulé *de morbis animi ab infirmato cerebro*,) & sûrement nous ne voyons pas cette conformation du cerveau. Voilà bien des dispositions de l'ame entant que passive, que nous ne pouvons pas pénétrer par l'extérieur.

Comme active, l'ame a des goûts & des propriétés qui ne dépendent point des organes, quoiqu'elle ne puisse les exercer ou les satisfaire que par le moyen des organes. Le célebre de Crousaz avoue qu'il étoit passionné pour la Musique, & qu'il n'avoit jamais pû tirer un ton juste d'un instrument, tant il étoit mal partagé d'organes.

Enfin, parmi les goûts & les talents qui varient suivant la différence des organes, il en est qui n'ont aucun rapport direct & nécessaire avec les vertus & les vices.

Qui oseroit assurer que ce n'est jamais par la différence des organes que les uns trouvent agréable un assortiment de couleurs que les autres trouvent désagréable; que les uns ont du goût & du talent pour la musique, pour la peinture, & que d'autres en sont destitués? Quelle que soit l'origine de ces goûts & de ces talents, à quelles vertus, à quels vices sont-ils liés?

Ppp 2 On

On assure (pag. 10. à la fin) que *la physionomie est un tableau vivant, très expressif, où la Nature déploie, développe & présente à nos yeux les vrais traits qui caractérisent chaque homme en particulier.* Si ces mots contiennent une définition, il en résulte qu'on peut connoître tous les caracteres par la physionomie telle qu'elle est représentée par cette définition; mais il n'en résulte pas que la physionomie soit effectivement le portrait de cet original.

Si ces mots contiennent une proposition, où est la preuve? La trouverai-je dans l'émotion de l'ame qui est causée par les passions, & qui occasionne le mouvement des esprits & le jeu des ressorts? J'ai déjà observé que le mouvement des esprits & le jeu des ressorts indiquent l'état actuel de l'ame, & non son état habituel.

La trouverai-je, cette preuve, dans le penchant invincible que la Nature nous a donné pour le bonheur? (p. 30. dern. l.) Effectivement on en conclut (id. ibid.) que la Nature ne pouvoit pas se dispenser de nous accorder la science de la physionomie. Cet Enthymeme suppose précisément ce qui est en question, que cette science nous seroit avantageuse; d'ailleurs ce raisonnement ne prouve rien, parce qu'il prouve trop. Une ame à l'abri de toute passion immodérée, une intelligence parfaite, une santé inaltérable seroient certainement utiles pour satisfaire notre penchant pour le bonheur; donc la Nature n'a pas pû se dispenser de nous faire ces présens. Ce raisonnement ne differe point de celui qu'on allegue en faveur de la science physionomique.

Je ne vois pas sur quel fondement on affirme avec Aristote (pag. 26. dern. l.) *qu'il n'est pas plus difficile de connoître les hommes à l'inspection des traits de leur visage, que de juger de la qualité des chevaux & des chiens de chasse,* à moins de presser la comparaison & de borner le sens du passage. En effet, à la vue d'un cheval ou d'un chien, on connoît ses qualités purement corporelles, si un cheval est vigoureux, s'il est léger; mais on ne connoît point si le cheval est quinteux,

si

si le chien est vorace. Philippe vit bien que le Bucéphale étoit un cheval d'un grand prix; vit-il qu'il craignoit son ombre? De même on connoît à la vue si un homme est sain, robuste, léger. Mais qu'est-ce que cela fait à la thése?

Aristote qui dit (p. 26. dern. l.) *que l'homme n'a pas un penchant que la Nature n'ait scellé par un signe extérieur & visible sur son corps*, qui par conséquent (p. 25. à la fin) exhortoit *à choisir des Magistrats d'une figure noble & prévenante, & à fuir le commerce de ceux qui sont disgraciés de la Nature, ou marqués de quelques signes extraordinaires*, & qui *recommandoit à Alexandre d'avoir recours à l'art de connoître les hommes par la physionomie:* (p. 25. après le milieu) L'Ecole de Pythagore & de Socrate (p. 17. au com.) qui aussi bien que Platon (p. 41. Note) en faisoient usage dans le choix de leurs disciples, comme les Gymnosophistes dans celui de leurs Souverains, (pag. 18. dern. l.) les Spartiates dans celui des enfans à élever, (p. 19. prem. l.) & les anciens dans l'achat des esclaves: (p. 54. à la fin.)

Pythagore & Socrate qui discernoient à la physionomie des hommes, (p. 41. & p. 17. à la fin) leurs qualités & leurs dispositions, & même leur fortune à venir; (p. 17. à la fin) Homere, Darès, Suétone & tant d'autres qui ont une attention particuliere de décrire la forme & la figure du corps des personnes dont ils parlent: (p. 49. & 50.)

Alexandre, qui de peur qu'on n'altérât sa physionomie, ne vouloit être tiré que par Apelles & par Praxitele: (p. 51. au com.)

Toutes ces autorités prouvent que ces gens-là pensoient ainsi, & que M. Pernety a beaucoup d'érudition. Que ce Savant me permette d'ajoûter à cette réponse générale quelques remarques particulieres. La permission de le tirer qu'Alexandre accorde seulement à Apelles & à Praxitele, eut peut-être une raison différente de celle que M. Pernety lui attribue par conjecture de son propre aveu; à ce que je sais, les Spartiates examinoient si les enfans étoient bien constitués & promettoient un tempérament robuste: ils ne pouvoient pas même exami-

ner autre chose; un enfant qui ne fait que de naître n'a aucune physionomie.

Puisque (*) Mr. P. assure que Socrate devint grand connoisseur en physionomie, je ne doute pas qu'il n'ait des autorités suffisantes, quoique je ne me rappelle point d'avoir lu ce fait, & quoiqu'il me semble contradictoire au souhait qu'il faisoit; si cependant c'est Socrate qui désiroit une ouverture pour voir le cœur des hommes; car surement il désiroit de voir le moral du cœur, non le physique: auroit-il fait ce souhait, s'il avoit cru que la science physionomique étoit certaine?

Je ne conçois pas quels changements dans les traits d'Alcibiade (v. P. p. 17. à la fin) auroient annoncé ses grandeurs futures, ni par quel signe extérieur & visible la Nature les avoit scellées. Socrate apperçut peut-être dans la physionomie d'Alcibiade, les qualités qui naturellement devoient le porter aux premieres dignités de la République. Il est même plus vraisemblable que Socrate n'eut besoin d'au-

(*) J'espere que M. Pernety ne s'offensera pas si je parois douter de la justesse de quelques-unes de ses citations. Je rends justice à l'étendue de ses connoissances en plusieurs genres; mais je juge par un endroit de son Discours qu'il a cité quelquefois de mémoire; & la mémoire la plus fidele est sujette à représenter les choses avec peu d'exactitude. Le passage que j'ai en vue se trouve p. 18. au milieu. *Bel enfant*, dit Virgile, *n'ayez pas trop de confiance dans votre beauté; nous n'en sommes pas la dupe, nous découvrons sous cette belle apparence le peu que vous valez.* Virgile dans la deuxieme Eglogue v. 15. 16. 17. & 18. parle de beauté, & dit qu'une beauté blanche ne doit pas trop se fier à son éclat, qu'on lui préfere souvent une beauté brune: pensée fort différente de celle que Mr. Pernety attribue à ce Poëte, sans doute par erreur de mémoire.

Me sera-t-il permis à cette occasion de relever une inexactitude d'une autre espece que je trouve p. 4. vers le milieu, au sujet des Systemes du Monde. *Les Physiciens ne balancent plus entre trois systemes qui se disputent la palme: Le Systeme de Copernic, perfectionné par Kepler & démontré par Neuton, emporte la palme de l'aveu général; il nous présente une certitude complette, il n'est hérissé d'autres difficultés que de celles qu'on trouve lorsqu'on applique les Théoremes généraux aux cas particuliers, & le nombre de ces difficultés diminue de jour en jour.*

d'aucune science physionomique. Les vices & les vertus d'Alcibiade éclaterent de bonne heure; & un aveugle qui auroit connu Alcibiade & Athenes, auroit pû prédire à coup sûr l'élévation & la chûte d'Alcibiade.

Je trouve sans réplique les raisons que je viens d'alléguer pour établir que la physionomie indique seulement certaines parties du caractere, & les réponses que j'ai opposées aux raisonnements allégués par D.P. pour prouver la proposition contraire: j'ajoûte que, quand même le caractere des hommes seroit entierement écrit sur leur visage, personne ne peut s'assurer de le bien lire, parce qu'on n'a point d'idée claire & précise de ce qui distingue les physionomies du rapport des traits avec ce qu'ils annoncent, en sorte qu'on en juge sans regle. Ce sera le sujet d'un autre Mémoire.



OBSER-

OBSERVATIONS DÉTACHÉES FAITES À L'OBSERVATOIRE ROYAL.

PAR MR. JEAN BERNOULLI.

Distances de l'extrémité orientale de l'anneau de Saturne à la Corne boréale de la Lune.

Ces distances ont été prises le 5 Septembre 1768. avec la lunette de Dollond, garnie d'un Micrometre objectif fait par le même Artiste & que j'avois bien vérifié. Les momens sont marqués en tems vrai, & déterminés exactement par des hauteurs correspondantes du Soleil.

Le 5 Sept. 1768. à	Distances en parties du Micrometre.	Distances en parties du Cercle.
$16^h. 34'. 59''.$	3 pouces $+ \frac{6}{10} + \frac{7}{500}$	$32'. 34''.$
16. 45. 43.	4 - - - $+ \frac{1}{20} + \frac{19}{500}$	36. 49.
16. 53. 9.	4 - - - $+ \frac{7}{20} + \frac{4}{500}$	39. 16.

Observations de la Comete de 1769.

Le 25 Oct. j'ai comparé la Comete avec l'étoile A du *Serpent*: & ayant réduit la position de cette étoile, tirée du Catalogue Britannique, j'ai trouvé pour le 25 Octobre 1769. à 7 heures du soir

l'ascension droite de la Comete $234°. 12'. 12''.$
& sa déclinaison 0. 17. 35. A.

Le

Le 19 Novembre je comparai la même Comete avec quelques petites étoiles d'*Ophiuchus*, & je trouvai ensuite qu'à 7 heures du soir

l'ascension droite de la Comete devoit avoir été 265°. 26⅓′
& sa déclinaison de 0. 11¼ Bor.

& par conséquent la longitude - - 265°. 1⅓′
& la latitude - - 23. 34½ B.

Je ne garantirai l'exactitude de cette derniere observation qu'à environ une minute près; mais elle peut mériter quelque attention parce que c'est certainement une des dernieres qu'on ait faites sur cette Comete.

Eclipses du 3e & 4e Satellite de Jupiter.

Le 4 Octobre 1770. à 7^h. 43′. 2″ Tems obs.
ou à 7. 37. 38. Tems vrai.

Immersion du IIIe Sat. Elle doit être arrivée un peu plus tard: car, à cause du clair de Lune & du peu de hauteur de Jupiter sur l'horizon, on ne voyoit qu'imparfaitement les bandes & les autres Satellites. C'est la derniere éclipse de ce Satellite qu'on puisse avoir vue en Allemagne & en France avant la conjonction de Jupiter.

Le 13 Octobre 1770. à 6^h. 16′. 29″ Tems obs.
ou à 6. 12. 48 Tems vrai.

Emersion du IVe Sat. Le crépuscule duroit encore, mais je voyois cependant assez bien les autres Satellites & je discernois un peu les bandes. Des vapeurs qui se sont élevées m'ont fait quelquefois reperdre ce Satellite; mais elles m'ont servi à conclure que l'observation n'étoit pas mauvaise, car encore à 6^h. 25′ de l'horloge elles me déroboient le IVe Sat. sans me cacher tout à fait les autres. Des nuages qui sont survenus ensuite me les ont dérobés tous ensemble.

Déclinaison de l'aiguille aimantée.

C'eſt la grande Méridienne que j'ai conſtruite à l'Obſervatoire qui m'a ſervi à déterminer de combien l'aiguille de la Bouſſole déclinoit au commencement du mois d'Octobre 1770. J'ai fait uſage de deux Bouſſoles de cuivre, dont les aiguilles ſont l'une de 4 pouces & l'autre de 8 pouces; & j'ai trouvé le 6 Octobre la déclinaiſon de 16°. 9′ Oueſt. C'eſt un milieu entre 6 réſultats dont le plus petit eſt 16°. 5′ & le plus grand 16°. 12′.

Le 1 Août 1751, on a obſervé avec une aiguille de 5 pouces la déclinaiſon de 14°. 16′ O.

CORRECTION.

T. XXV. p. 310. l. 9. ſormer liſez *former*.





TABLE.

CLASSE
DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

CLASSE
DE MATHÉMATIQUE.

Sur

CLASSE
DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.




WIDENER LIBRARY
HX IN1C I

